基于光强传输方程的非干涉相位恢复与定量相位显微成像:文献综述与最新进展

左 超[1,2] 陈 钱[2] 孙佳嵩[1,2] Anand Asundi[3]

[1]南京理工大学电子工程与光电技术学院智能计算成像实验室, 江苏 南京 210094

[2]南京理工大学江苏省光谱成像与智能感知重点实验室, 江苏 南京 210094

[3]南洋理工大学机械与航空航天工程学院, 新加坡 639798

摘要 相位恢复与定量相位成像是光学测量与成像技术领域的一个重要课题。传统干涉测量法依赖高度相干光源的干涉叠加,干涉装置复杂,测量环境要求苛刻,引入的散斑噪声极大地限制了传统干涉测量法在显微成像领域的应用。光强传输方程(TIE)作为最具代表性的相位恢复方法之一,为定量相位成像提供了一种新的非干涉手段。近些年来,该方法在国内外得到广泛研究与关注,发展迅速,成果显著,在自适应光学、X 射线衍射光学、电子显微学、光学显微成像等领域展现了巨大的应用潜力。从光强传输方程的基本原理、方程求解、光强轴向微分的差分估计、部分相干成像与光场成像等几方面综述了光强传输方程在光学成像领域,特别是定量相位显微成像领域的研究现状与最新进展,并针对现存问题以及今后的研究方向提出了建议。

关键词 成像系统; 相位恢复; 光强传输方程; 定量相位成像; 显微成像

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/CJL201643.0609002

Non-Interferometric Phase Retrieval and Quantitative Phase Microscopy Based on Transport of Intensity Equation: A Review

Zuo Chao[1,2] Chen Qian[2] Sun Jiasong[1,2] Anand Asundi[3]

[1] *Smart Computational Imaging Laboratory, School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu* 210094, *China*

[2] *Jiangsu Provincial Key Laboratory of Spectral Imaging & Intelligent Sense, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu* 210094, *China*

[3] *School of Mechanical and Aerospace Engineering, Nanyang Technological University, Singapore* 639798, *Singapore*

Abstract Phase retrieval and quantitative phase imaging are central subjects in optical measuring and imaging technologies. The most well-established method for obtaining quantitative phase is through interferometry. However, this class of methods relies heavily on the superposition of two beams with a high degree of coherence, and complex interferometric device, stringent requirement on the environmental stability, and associated laser speckle noise greatly limit its applications in the field of microscopic imaging. On a different note, as one of the typical phase retrieval approaches, the transport of intensity equation (TIE) provides a new non-interferometric way to access the quantitative phase information. In recent years, it has been extensively studied and remarkable advancements have been made in the fields of adaptive optics, X-ray diffraction imaging, electron microscopy, and optical microscopy. In this work, we will review the basic principles and some recent advances in TIE phase

收稿日期: 2016-01-25; **收到修改稿日期**: 2016-02-23

基金项目: 国家自然科学基金(11574152, 61505081)、江苏省六大高峰人才项目(2015-DZXX-009)、江苏省 333 工程科研项目(BRA2015294)、江苏省光谱成像智能感知重点实验室开放基金(3092014012200417)、南京理工大学自主科研基金(3092014012200417)、南京理工大学紫金之星项目

作者简介: 左 超(1987—),男,博士,副教授,主要从事计算光学显微成像与快速三维传感等方面的研究。

E-mail: surpasszuo@163.com

retrieval, including its solutions, axial intensity derivative estimation, partially coherent imaging and light field imaging, with emphasis on its applications in the field of quantitative phase microscopy. The challenging problems as well as future research directions will also be discussed.

Key words imaging systems; phase retrieval; transport of intensity equation; quantitative phase imaging; microscopy

OCIS codes 110.0180; 100.5070; 180.6900

1 引　言

相位恢复是光学测量与成像技术领域的一个重要课题。在某些特定领域,如光学测量、材料物理学、自适应光学、X 射线衍射光学、电子显微学、生物医学成像等领域,大部分样本都属于相位物体。这类物体的振幅透射率分布均匀,但折射率或厚度的空间分布不均匀,因此相位物体的光波振幅改变甚小,相位改变却非常大。人眼或其他光探测器都只能判断物体的振幅变化而无法判断其相位的变化,因此也就不能“看见”相位物体,即不能区分相位物体内厚度或折射率不同的各个部分。所以对于这些领域,获取相位信息显得尤为重要。

相位成像技术,特别是针对生物样品和弱吸收透明物体的显微成像技术,已经有很长的发展历史。传统明场显微技术通过样品的光学吸收(振幅)构建图像,但由于生物细胞的细胞质和大部分细胞器的光学吸收系数很小,几乎无色透明,因此容易丢失相位信息。传统明场显微图像通常对比度很低,很难观察到有用的细胞细节。为克服这一困难,学术界最常用的方法是对样本进行染色。利用细胞内不同组分对不同化学或荧光染料的不同亲和性(吸附作用),形成足够大的光强反差或生成不同的光谱,从而达到细胞成像的目的。目前广泛采用的荧光显微技术与激光共聚焦显微技术通过选择性标记细胞内的特异性分子以显示细胞的结构与功能特性[1-2]。然而无论是传统染料染色方法还是荧光标记染色方法,都存在一定的局限性。首先,许多标记手段需要杀死细胞,而许多活细胞染色方法也不可避免地对细胞的正常生理过程产生不利影响;其次,在强激发光作用下样本容易发生损伤,荧光基团还存在光漂白问题,都会影响对细胞的长时间观察;最后,许多重要的物质,如细胞内的小分子和脂类等很难或者无法被荧光标记。

在研究活细胞的动态过程及各项生理活动时,无标记显微是一种最为理想的探测手段。生物细胞结构特征及各组分不同的折射率分布对于入射光波最直接的影响就是产生不同的相位延迟,即相移。相移为实现生物细胞无标记成像与三维信息的反演提供了一种重要手段。为了利用相移原理实现细胞成像,需要将相位信息转换为可感知的信号即光强。泽尼克相衬显微与微分干涉相衬显微技术作为最常用的无标记显微方法,可将折射率的空间差异转换为图像的强度对比,大大提升了细胞等弱吸收样品在镜下的图像衬度[3-4]。然而这两种方法最终获得的图像强度与相位分布之间并不呈线性关系,因此只适用于成像时进行定性对比,而样品物理厚度与折射率系数所决定的相位特性并不能由这些图像量化得出,这给细胞的定量测量带来了极大不便。随着生命科学与生物医学研究的不断深入,生物学家们也越来越意识到定量测量细胞和组织中的相位分布特性对于细胞显微观察、结构信息提取以及动力学行为研究的重要性。因此相位测量技术与定量相位显微技术的产生与发展成为必然趋势。

纵观光学测量近半个世纪的进展,最经典的相位测量方法应当非干涉术莫属。自从 19 世纪 80 年代第一次证实光干涉原理可以作为测量工具使用以来,干涉技术在光学测量中一直占有十分重要的地位。尽管该技术多年来不断发展,但其基本原理仍然没有改变。干涉测量方法通过引入额外的相干参考光,将不可见相位信息转换为强度信号即干涉条纹,这样便可以通过传统成像器件采集并加以分析。通过一系列的条纹分析算法,可以将相位从干涉图中解调出来。经过数十年的发展,经典的干涉测量术已经日趋成熟,并繁衍出多个分支,如电子散斑干涉、干涉显微、数字全息等[5-9]。它们的基本原理极其类似,发展也几乎是并行的。特别是数字全息,由于其数字记录与数值再现的独特优势与灵活性,在近十余年取得了非常大的进展,已经成为定量相位测量与显微的一个新标杆。尽管如此,以数字全息为基础的干涉定量显微成像方法并没有撼动传统显微成像方法在生命科学等领域的地位,没有带来预计的革命性成果和技术变革。究其原因主要是由于数字全息实现定量相位测量方式的干涉性。作为一种干涉测量法,数字全息显微技术往往依赖于高度时间相干性的光源(如激光)照明以及较为复杂的干涉装置。前者的引入带来了相干噪声即散斑,降低了图像的空间分辨率,影响成像质量;而额外的参考光路的引入又使系统对于测量环境的要求十分苛刻。

与干涉测量法截然不同，相位测量的另一大类方法并非基于光的干涉原理，称之为非干涉相位测量技术。夏克-哈特曼波前传感器采用几何光学原理的相位测量方法，应用一个微透镜阵列将待测光波场聚焦为一系列点阵，通过测量这些点阵相对于参考规则间距点阵（理想无像差情况）的位移量，获得待测波场的相位梯度（一般称为波前的斜率），经过积分即可得到相位（波前）分布[10-12]。但是由于微透镜物理尺寸的限制，探测信号并没有充分利用成像器件的所有有效像素，导致恢复相位的空间分辨率很低，所以夏克-哈特曼波前传感器很少直接应用于相位成像与显微领域。

另一类非常重要的非干涉相位测量技术统称为相位恢复。由于直接测量光波场的相位分布非常困难，而测量光波场的振幅或强度十分容易。因此，可以将由强度分布来恢复（估算）相位这一过程作为数学上的一个逆问题，即相位恢复问题。相位恢复方法可以细分为两小类，即迭代法与直接法。基于迭代运算的相位复原法于 1972 年由 Gerchberg 等在研究电子显微成像的相位恢复问题时首次提出，该算法称为 GS（Gerchberg-Saxton）算法[13-14]。该方法指出，当待测光波场在像平面和远场衍射平面的光强分布已知时，可以通过衍射计算迭代的方式求解光场波前相位。随着成功解决该问题，相位恢复也激起了研究者们极大的兴趣，随后被推广到 X 射线成像、自适应光学、光学相位显微等众多领域[15-21]。GS 算法的提出具有开创性意义，但也存在很多问题[22-23]。这些问题一方面是求解逆问题时所固有的，譬如解的存在性与唯一性问题，此问题是由于函数到函数的傅里叶变换幅值是多对一的映射关系所引起的。另一方面则是由迭代算法本身引起的，如算法经过最初几次迭代后收敛速度减慢甚至陷入停滞、限于局部（非全局）极小值。自 GS 算法提出以来，为改善算法收敛性并适应不同的应用背景，各种新算法不断涌现。1973 年，Misell[24]指出迭代相位恢复不仅适用于像平面和远场衍射平面的光强分布，还可以拓展到两幅或者多幅不同离焦量的图像之间的迭代，从而能够提高算法的准确性和收敛性。与 GS 算法相比，Misell 的改进算法更具实用性，并且打开了改进 GS 算法的思路，此后对离焦位置、多波长、相位调制等进行改进的算法不断涌现[25-27]。1982 年，Fienup[28]在分析了 GS 算法的优化原理后指出 GS 算法是一种误差下降算法，本质与最速下降算法相同。为解决 GS 算法陷入停滞的问题，Fienup 基于非线性控制思想提出了混合输入输出（HIO）算法。HIO 算法有效地改善了 GS 算法的收敛效果，得到了较为广泛的应用。然而，迭代相位恢复算法的固有缺陷在于需要大量迭代与复杂运算，难以应用于速度要求较高的场合。此外，迭代相位恢复算法需要光波场的传播严格遵守标量衍射定律，这种假设的合理性仅限于完全相干光场，对于部分相干光场而言，光场的传播不再简单地遵从标量衍射定律，这也限制了迭代相位恢复算法在部分相干光照明下的应用[21,29-30]。将叠层成像的思想引入传统迭代相位恢复方法，提出了一种新型的迭代相位恢复算法——PIE（Ptychographic Iterative Engine）算法。该方法通过改变照明光束和样品的相对位置，采集样品的一系列交叠区域衍射图像，通过相位的反复迭代演算获得整个样品的复振幅分布。由于获取的图像数据高度冗余，该方法不但大大提高了传统迭代相位恢复算法（如 GS 算法与 HIO 算法）的收敛速度，而且还消除了正确解和复共轭之间的二义性问题。随后十余年间，PIE 算法得到了众多学者的研究与改进，在探针（照明光）恢复、扫描位置误差校正、部分相干照明模式的解耦、横向/轴向分辨率的提高等方面涌现了大量研究成果[31-39]。目前，PIE 算法已在可见光相位成像、X 射线衍射成像、电子显微成像等不同领域得到了广泛应用。国内中国科学院上海光学精密机械研究所朱健强课题组、江南大学刘诚课题组、中国科学院光电研究院史祎诗课题组等也在轴向误差修正、成像信噪比提高等方面取得了丰硕的成果[40-42]。

与迭代法相对应的另一类非干涉相位恢复方法称为光强传输方程（TIE）。光强传输方程于 1983 年由 Teague 利用亥姆霍兹方程在傍轴近似条件下首次推导得出[43]。TIE 是一个二阶椭圆型偏微分方程，阐明了平行于光轴方向上光强度的变化量与垂直于光轴平面上光波的相位的定量关系。该方法区别于迭代相位恢复算法的一大特点是没有利用传统的衍射计算公式来迭代恢复相位，而是在待求平面上的光强分布（直接测量）以及光强轴向微分（通过采集离焦光强进行数值差分估计得到）已知的情况下，通过数值求解光强传输方程直接获取相位信息，从而不需要任何迭代求解过程。相比于传统基于干涉的相位测量方法，光强传输方程法具有非干涉（无需参考光）、计算简单（无需迭代）、适于时/空部分相干照明（如 LED 照明、传统明场显微镜中的卤素灯与科勒照明结构）、无需相位解包裹（直接获得绝对相位）、无需复杂的光学系统及苛刻的实验环境等诸多独特优势[43-54]。光强传输方程最初由 Roddier 研究小组应用于自适应光学领域，随后 Nugent 研

究小组成功将其应用于 X 射线衍射成像与中子射线成像领域[50,55-61]。这些领域的共性在于难以借助或实现高相干性的干涉光源。近年来，光强传输方程相关理论框架逐步完善，较为严格地证明了方程的适定性与解的唯一性，提出了高效求解光强传输方程的方法，明确了轴向离焦距离与成像噪声的定量关系，从理论与实验角度验证了部分相干照明下方程的适用性[44,48,62-65]；另一方面，从事定量相位成像领域的相关研究人员也越来越意识到采用相干性较低的照明对分辨率提高以及成像质量改善的重要性。这两方面随后成为了光强传输方程在光学显微领域广泛应用的催化剂。Waller 等[66]采用多个离焦平面的强度信息增强相位恢复的准确度与抗噪能力；Kou 等[52]将光强传输方程与差分干涉相衬成像技术结合，成功将其应用于人体颊上皮细胞的定量相位显微成像；Gorthi 等[54]将光强传输方程应用于流式细胞术，实现了血红细胞高通量自动分选。此外将光强传输方程结合样品旋转实现相位层析也取得了一定的进展[67-68]。与此同时，关于提高光强传输方程相位成像精度与噪声抑制的理论研究也有大批报道[69-73]。在国内，程鸿等课题组也针对光强传输方程的求解方法、重构条件等相继开展了大量研究[74-78]。近年来，本课题组也针对此方向开展了持续、系统的研究工作，在光强传输方程理论方面的若干关键问题上取得了一定进展，包括非齐次边界条件下方程的快速求解[63,79]、方程求解误差的分析与补偿[80]、光强轴向微分的最优差分估计[81]、部分相干光场下的相空间拓展[82]等。实验中，采用电控变焦透镜与空间光调制器取代机械扫描，实现了离焦光强图像序列的高速采集，并将光强传输方程应用于活细胞的动态定量相位显微成像，针对乳腺癌细胞的细胞膜与片状伪足的浮动过程、巨噬细胞的凋亡与吞噬过程进行了高分辨率动态定量相位显微成像[83-84]。时至今日，关于光强传输方程在相位恢复与定量相位成像领域的新研究与新进展仍不断涌现，越来越多的学者投身其中，相关的研究报道也开始显著地增长，且增长势头有明显加强的趋势。

本文系统地回顾光强传输方程的相关研究成果与最新进展。讨论光强传输现象及其成因，以及有关光强传输方程的基本原理与概念(第 2 节)，综述光强传输方程理论方面的若干关键问题(第 3～5 节)，介绍光强传输方程的实验光路结构与具体应用(第 6 节)，总结全文并对现存问题以及今后的研究方向提出建议(第 7 节)。

2　基本概念

由于光传感器仅对光强信息敏感而无法探测相位信息，任何相位测量方法都需要将不可见的相位信息转化为可见的光强信号进行探测。如经典的干涉测量法利用相干光的干涉效应，将两束相干光进行空间叠加，将不可见的相位信息转化为可见的干涉条纹，利用光传感器记录信号，获得干涉条纹后，通过条纹分析技术将相位从干涉图中解调出来，实现相位获取。

光波相位信息向强度信息的转化其实不仅仅依赖于干涉。光波自身的传播效应就是一种自发的光强-相位的转化过程。正如晴天游泳池底明暗相间的网格结构一般(图 1)，涟漪起伏的水面就是一个相位物体，虽然水是透明的，但是它可以改变入射光的相位。池底明暗相间的网格结构正是这种波纹状的相位结构经过一段传播距离后的自我显现与转变，即相位在传播过程中引起强度的变化。该现象称为光强传输效应。在这一场景中，既没有激光，也不存在干涉，但泳池底部光强图案却与干涉条纹具有异曲同工之妙。这种现象表明，相位可以被转化为光强，并且不需要借助于干涉，该过程称为相衬。与池底的明暗图案反映水面特性类似，光强传输方程非干涉相位复原的根本目的，是通过测量这种由相位结构在离焦平面导致的强度改变(相衬信号)从而反演出定量相位分布。通俗地来说，即通过池底明暗相间的条纹恢复水面的形貌。当然，光强传输效应并不是任何时候都能观察得到的。譬如当游泳池水面完全静止不动时，其表面接近于平面，此时在池底就无法观测到明暗相间的图案。

光强传输效应可以借助几何光学理论定性解释，如图 2 所示。如果关心的光波信号是完美的平面波，经过一段传输距离 Δz 后，其强度并不会发生任何改变，如图 2(a)所示。这是因为平面波仅沿 z 轴传播，可以看作一簇平行的光线，其传输方向垂直于波前(等相位面)，如图 2(c)所示。由于光线在自由空间中沿直线传播，所以不论在哪个位置，光强的分布都是相同的。然而当感兴趣的信号并非平面波时，随着传播距离的改变，其强度也会发生相应的改变，如图 2(b)所示。图 2(c)直观地给出了这种现象的几何解释，虽然波前分布并不均匀，但可以将其看成若干分块均匀的函数的组合，在每块小区域中，波前的分布可以用平面波近似，即这些区域内光线的传输方向垂直于对应的波前。然而从整体来看，相位分布是不均匀的，所以在不同位置

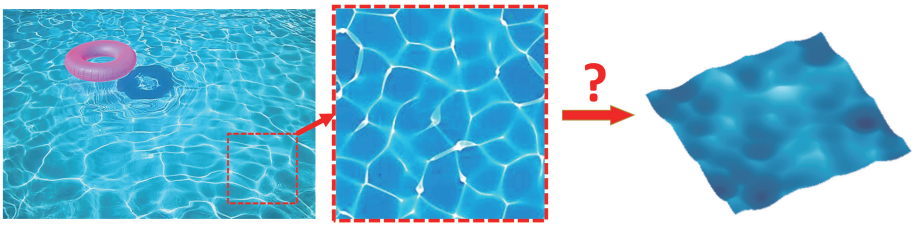

图 1　晴天游泳池底的光波图案

Fig. 1　Wave-like pattern at the bottom of a swimming pool in sunlight

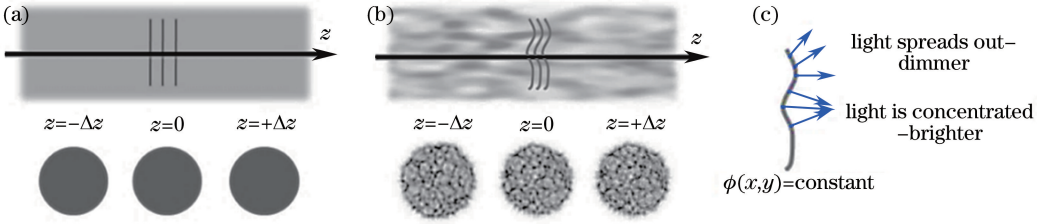

图 2　相位在光强传输效应中的重要作用。(a) 标准平面波传输过程中强度保持不变；(b) 非平面波强度随着光波的传输而改变；(c) 光强传输效应的几何光学直观解释

Fig. 2　Influence of phase on transport of intensity. (a) Intensity does not change during propagation of on-axis plane waves; (b) intensity of non-planar waves varies with light wave propagation; (c) intuitive geometric-optics interpretation of transport of intensity effect

的局部区域内光线的分布与传输方向均有所不同，那么在某些区域的光线必然出现会聚或者发散，从而导致光强在传播过程中发生变化。

1983 年，Teague[43] 首次利用一个二阶椭圆偏微分方程建立了光在传播过程中沿着光轴方向光强的变化量与垂直于光轴平面上光波的相位之间的定量关系，该方程称为光强传输方程。Teague 将光波复振幅代入傍轴近似下的亥姆霍兹方程(傍轴波动方程)，分离实部、虚部得到光强传输方程。其实光强传输方程还可以在傍轴近似条件下利用坡印廷定理或者菲涅耳衍射定律在小传播距离极限下推导得到。考虑沿 z 轴传播的傍轴单色相干光波，其复振幅可以表示为 $U(x,y)=A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$，光强传输方程可以表示为

$$-k\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}=\nabla\cdot[I(\boldsymbol{r})\nabla\phi(\boldsymbol{r})],\tag{1}$$

式中 k 为波数，$\boldsymbol{r}$ 为横向位置坐标 (x,y)，$I(\boldsymbol{r})$ 为光强分布，不失一般性，认为 $I(\boldsymbol{r})$ 位于 $z=0$ 的平面，∇ 为作用于 $\boldsymbol{r}$ 平面的哈密顿算符。从整体上看，光强传输方程本质上是能量守恒定律的一种表达，在傍轴近似下，光波场的纵向能流可近似由光强替代，而横向能流则由 $I\nabla\phi$ 决定，$I\nabla\phi$ 代表时间平均坡印廷矢量的横向成分[44]，其散度 $\nabla\cdot(I\nabla\phi)$ 代表横向 x、y 两方向上能量改变的总和，纵横能量耗散必须相等以保证能量守恒。拆分后方程的左侧是光强的轴向微分，最简单的情形下，仅需沿着光轴采集两幅强度图像，并通过数值差分估计得到。这一部分的相关内容将在第 4 节详细讨论。展开光强传输方程右侧可以得到

$$-k\frac{\partial I}{\partial z}=\nabla\cdot(I\nabla\phi)=\nabla I\cdot\nabla\phi+I\nabla^2\phi,\tag{2}$$

式中的两项分别包含了相位的梯度(斜率，一阶导数)与相位的曲率(二阶导数)。相位的轴向变换量由相位的斜率与曲率共同决定，斜率表现为强度的平移，与棱镜作用相同；而曲率表现为强度的会聚与发散，与透镜作用相同。故这两项称为棱镜(斜率、梯度)项与透镜(曲率)项[85]。

当相位为常数时，等式右端为 0，表明此时观察不到光强传输现象。这与之前讨论的平面波情况一致。另一种更有意义的情况是当所在横向平面的光波场光强分布均匀，即 I 为常数时，对应于纯相位物体的情况，光强传输方程可进一步简化为

$$-k\frac{\partial I}{\partial z}=I\nabla^2\phi。\tag{3}$$

这是一个标准的泊松方程，表明纯相位物体在轻微离焦下所产生的光强分布正比于相位分布的曲率。

这也正是图 1 中游泳池底的光波图案所代表的物理意义。

3　光强传输方程的求解

光强传输方程是一个关于相位 ϕ 的二阶椭圆型偏微分方程，所以基于光强传输方程的相位恢复问题本质上是一个边界值问题(边界值问题＝微分方程＋边界条件)，即在某些特定边界条件的约束下求解该偏微分方程。下面用更严格的数学语言表述该方程的求解问题。假设待测区域定义在二维有界开区间 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$，区间的边界是一个分段连续函数 $\partial\Omega$，光强分布 I 是定义在闭区间 $\overline{\Omega}$(包含区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$) 上的一个非负函数，I 在 Ω 上连续且严格为正。光强轴向微分 $\partial I/\partial z$ 在 Ω 上连续。待求的相位 ϕ 在 Ω 上是一个单值连续函数(光强严格为正与相位单值连续这两个条件已经排除了相位漩涡的情况)。经典的偏微分方程基本理论表明光强传输方程的求解必须依赖于特定的边界条件[86]。主要考虑三类可能的边界条件：

1) Dirichlet 边界条件：给定待求相位函数相位 ϕ 在区域边界上的值

$$\phi\big|_{\partial\Omega} = g\,; \tag{4}$$

2) Neumann 边界条件：给定待求相位函数相位 ϕ 在区域边界上的法向导数与光强函数的乘积

$$I\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = g\,, \tag{5}$$

式中 g 为定义在边界 $\partial\Omega$ 上的一个光滑函数，$\partial\phi/\partial n$ 为法向导数，其方向指向区域外侧；

3) 周期性边界条件：相位在区域边界为周期循环重复(仅对矩形区域有效)，即相位在左边界与右边界分布完全相同。

光强传输方程的可解性与唯一性首先由 Gureyev 等于 1995 年证明，对于 Dirichlet 边界条件，根据椭圆型偏微分方程的基本结论，光强传输方程的解必然存在且唯一[48,86]。对于 Neumann 边界条件，方程的解有可能存在，也可能不存在。这取决于光强传输方程是否满足相容性条件[48,87]。相容性条件可以通过对光强传输方程两侧在区域 Ω 上积分，再利用散度定理推导得到，可表示为

$$\oint_{\partial\Omega} I(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_{\Omega} -k\,\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\mathrm{d}r\,。 \tag{6}$$

对于 Neumann 边界值问题[(1)式与(5)式]，当满足相容性条件时，光强传输方程的解存在。利用唯一性定理可得光强传输方程的唯一解为一个任意的加性常数。(6)式背后所蕴含的物理意义本质上就是能量守恒定律，区域内部损失的能量(等式右侧)必须由通过边界流入的能量(等式左侧)来补偿。如果将区域 Ω 拓展到整个无界空间，可以消去等式左侧的曲线积分，则相容性条件可以表示为

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0\,。 \tag{7}$$

(7)式代表无界自由空间中的能量守恒定律。本质上，由(6)、(7)式表示的能量守恒定律是一种普适的物理规律，它们的有效性仅依赖于傍轴近似。

3.1　求解算法与边界条件

自光强传输方程提出以来，其求解就是一个研究热点，Teague[43]在 1983 年推导得出光强传输方程后尝试采用辅助函数将光强传输方程化简为泊松方程求解。该辅助函数在后续文献中被称为 Teague 辅助函数 ψ，满足

$$I(\boldsymbol{r})\,\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = \nabla\psi(\boldsymbol{r})\,, \tag{8}$$

则光强传输方程可以简化为两个标准的泊松方程：

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z} = -\frac{1}{k}\,\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})\,, \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\,[I^{-1}(\boldsymbol{r})\,\nabla\psi(\boldsymbol{r})] = \nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\,。 \tag{10}$$

Teague 采用格林函数法推导得到解的解析表达式[43,88]。1988 年，Ichikawa 等[85]首次实验验证了光强传输方程，采用傅里叶变换方法求解该方程，获得了待测一维物体的相位分布。该方法随后被指出仅是光栅剪切干涉的一个特例而已[56]。与此同时，在自适应光学领域，以 Roddier 为代表的研究小组简化光强传输

方程，假设待测光波场的振幅几乎均匀，则可将光强传输方程简化为一个标准的泊松方程[55-59]。该泊松方程表明光强轴向微分与波前相位的曲率成正比，故此项技术又称为波前曲率传感。Roddier[55-56]通过测量望远镜入瞳面处聚焦与轻微离焦的光强信号估计光强轴向微分，并将此信号直接反馈到自适应光学元件中实时校正大气湍流引起的波前像差。Roddier 的研究工作对光强传输方程相位测量方法的推动是毋庸置疑的，他的贡献不仅是将光强传输方程成功应用于自适应光学与天文成像领域，还首次提出采用雅可比迭代法对光强传输方程的简化形式进行有效的数值求解，这或许是光强传输方程首个数值求解算法[89]。随后多重网格法、泽尼克多项式展开法、快速傅里叶变换法（FFT）等求解方法相继被提出[44,62,90-95]。1996 年，Gureyev 等[94]提出利用正交多项式分解求解光强传输方程（如泽尼克多项式或傅里叶基函数），并指出当光强均匀分布时，通过快速傅里叶变换可以有效求解光强传输方程[62]。随后 Paganin 等[44]拓展了该方法，使快速傅里叶变换求解法可以有效地应用于待测光波场光强分布不均匀的情况。这种基于快速傅里叶变换的求解法因其简单、高效并适用于方形边界区域，成为应用最为广泛的求解光强传输方程的数值解法[44,62,90,95]。Paganin 等[44,62]提出的快速傅里叶变换法最终解的表达形式为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -k\nabla^{-2}\nabla\cdot\left[I^{-1}(\boldsymbol{r})\nabla\nabla^{-2}\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right], \tag{11}$$

式中∇^{-2}为逆拉普拉斯运算符，(11)式中微分算符均通过快速傅里叶变换，以频域滤波的方式实现数值计算[44]。

对求解光强传输方程而言，比求解算法更关键的一个实际问题是如何获取边界条件。即使求解算法正确，如果没有施加正确的边界条件，仍然无法获得准确解。但想要准确获得求解光强传输方程所需的边界条件并非易事。Teague[43]的格林函数法中，必须要已知相位函数在边界上的分布，并以此作为求解该方程的 Dirichlet 边界条件，这显然是十分困难的。因为相位函数正是需要测量的对象，一般而言进行任何测量之前不可能预先知道其在区域边缘上的分布，因此 Teague 建议边界值采用夏克-哈特曼传感器或其他方法测量，这显然极不方便。Roddier[55-56]首次采用 Neumann 边界条件求解光强传输方程，随后此方法又被 Woods 等[88]所采用。该方法的优点在于边界信号可以在光瞳平面边界处测得。这些方法都依赖于一个假设，即光强的空间分布均匀，所以这些方法并不适用于吸收性较强的物体。此外，从光瞳信号中分离边界信号并以此作为求解方程的边界条件，也被证明非常困难[57,93]。因为快速傅里叶变换法本身隐含了周期性边界条件且假设输入的有限长信号是周期性重复的，而实际待测物体大部分情形下并不能满足该假设[45,95-96]。

由于难以获得边界信号，因此许多研究人员尝试直接求解光强传输方程而不借助于任何边界信号的测量。这些方法的共性是通过某些手段令等式左侧为 0，即

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\mathrm{d}r = 0, \tag{12}$$

消去边界条件项的作用，将无界空间中的能量守恒定律限制在有界空间内使用。一般而言，不能保证(12)式总是成立，除非(6)式左侧为 0。这在物理上对应了一种特殊情况，即流入或流出区域边界的净能量为 0。为了满足(12)式，一种简单而普遍的做法是将待测物体置于图像视场中央，这样可以认为区域边界的相位是平的，即满足了齐次 Neumann 边界条件（$I\partial\phi/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$），从而使(6)式左侧为 0。实际上不但可以定义齐次 Neumann 边界条件，还可以定义齐次 Dirichlet 边界条件（相位在区域边界为常量$\phi|_{\partial\Omega} = C$）或者周期性边界条件（相位在区域边界处是周期循环的，主要针对矩形区域）。此时快速傅里叶变换法可以很好地应用于该场合，仿真结果如图 3 所示。但在实际测量中，不可能总保证待测物体处于视场中央，因为这并不能反映一般情形；此外当物体的尺寸大于视场时，这样做也是不切实际的。当物体的相位延伸到图像的边界时，如果还是直接采用快速傅里叶变换法求解，就会产生严重的边界误差[45,95-96]。针对此问题，Volkov 等[95]提出了一种解决方法，该方法在采用快速傅里叶变换法求解前，先将图像镜像延拓到原尺寸的 4 倍，自动满足两种特殊的均匀边界条件，从而可使(6)式左侧为 0。尽管 Volkov 等的方法在某些情况下效果优于传统的快速傅里叶变换法，但是该方法仅是一种数学手段，认为通过图像延拓的方式可以消去通过区域边界的净能量，这在物理学上缺乏根据。如此导致无法满足相容性条件，产生严重的边界误差，仿真结果如图 4 所示[63]。

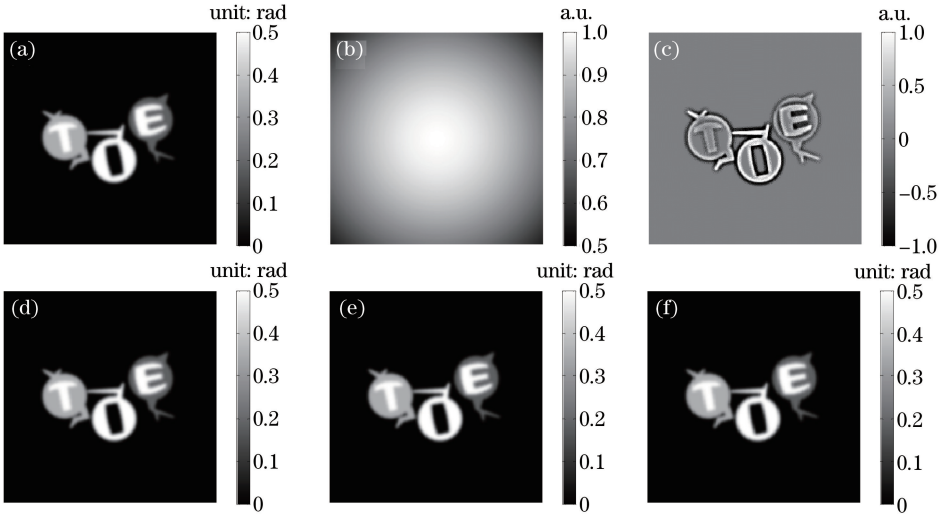

图 3　孤立物体处于视场中央时光强传输方程相位恢复的仿真。(a) 相位分布；(b) 光强分布；(c) 轴向光强微分；(d) 快速傅里叶变换法恢复得到的相位(周期性边界条件)；(e) 偶对称延拓法恢复得到的相位(零 Dirichlet 边界条件)；(f) 奇对称延拓法恢复得到的相位(零 Neumann 边界条件)

Fig. 3　Phase retrieval simulation for an isolated object located at the central position. (a) Phase distribution; (b) intensity distribution; (c) axial intensity derivative; (d) phase retrieved by the FFT-based method (periodic boundary conditions); (e) phase retrieved by the even symmetrization method (zero Dirichlet boundary conditions); (f) phase retrieved by the odd symmetrization method (zero Neumann boundary conditions)

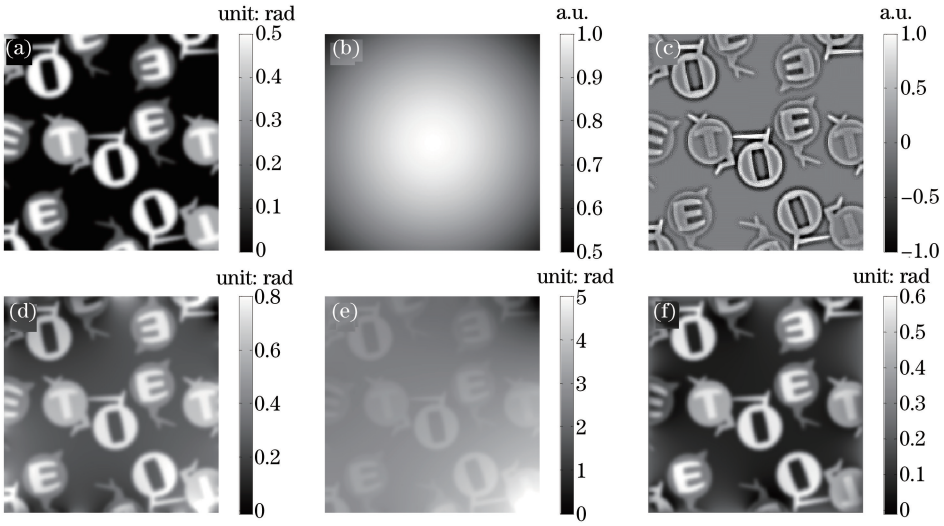

图 4　复杂物体延伸到图像边界时光强传输方程相位恢复的仿真。(a) 相位分布；(b) 光强分布；(c) 轴向光强微分；(d) 快速傅里叶变换法恢复得到的相位(周期性边界条件)；(e) 偶对称延拓法恢复得到的相位(零 Dirichlet 边界条件)；(f) 奇对称延拓法恢复得到的相位(零 Neumann 边界条件)

Fig. 4　Phase retrieval simulation for a complex object covering the image boundary. (a) Phase distribution; (b) intensity distribution; (c) axial intensity derivative; (d) phase retrieved by the FFT-based method (periodic boundary conditions); (e) phase retrieved by the even symmetrization method (zero Dirichlet boundary conditions); (f) phase retrieved by the odd symmetrization method (zero Neumann boundary conditions)

针对此问题，Zuo 等[63]提出了一种基于离散余弦变换(DCT)的光强传输方程求解方法，首次实现了光强传输方程在非齐次 Neumann 边界条件下的快速求解。该方法需在待测物平面(或者其共轭平面)放置一个矩形光阑，且光阑内部区域可以被相机完整拍摄。经推导发现，由于光阑的存在，光强轴向微分信号中的光阑边界上会额外产生一圈 δ 函数信号，恰好对应求解光强传输方程所需的 Neumann 边界条件[(5)式]。此外，由于光阑的限制作用，拍摄到的光强图像自动满足能量守恒定律，即 Neumann 边界值的相容性条件。

这意味着该非齐次 Neumann 边界值问题适定且具有唯一解(唯一到一个任意的加性常数)。基于离散余弦变换的光强传输方程求解方法的具体推导参见文献[63],最终的求解公式可以表示为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -k\nabla_{\mathrm{DCT}}^{-2}\nabla_{\mathrm{DCT}}\cdot\left[I^{-1}(\boldsymbol{r})\nabla_{\mathrm{DCT}}\nabla_{\mathrm{DCT}}^{-2}\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right]。\tag{13}$$

(13)式与 Paganin 等[44,62]提出的(11)式十分类似,区别在于逆拉普拉斯运算符$\nabla_{\mathrm{DCT}}^{-2}$与梯度运算符$\nabla_{\mathrm{DCT}}$均采用离散余弦变换实现。这是由于方形区域的拉普拉斯本征函数为余弦谐波而非一般的指数谐波。此外需要注意上述所有运算必须准确定义在矩形闭区间 $\overline{\Omega}$ 上,即包含光阑边界及其内部区域(包含所有边界信号在内)。这样被测光强信号便可以作为一个整体处理,不需要借助任何特殊的方法从光强轴向微分信号中分离边界信号。因此该方法解决了实验中边界条件信号的产生、获取及分离等一系列复杂问题。图 5 所示为算法的仿真结果,在待测物平面引入一个矩形光阑,对应产生光强轴向微分信号,从放大区域可以看出,光阑引入了额外的边界信号,该信号在没有光阑时无法观测到。基于离散余弦变换法求解光强传输方程,可以得到准确无误的重构结果,且不存在任何边界误差[图 5(b)～(f)]。该方法的有效性随后也得到了实验验证,已成功运用于微光学元件的形貌表征[79]。

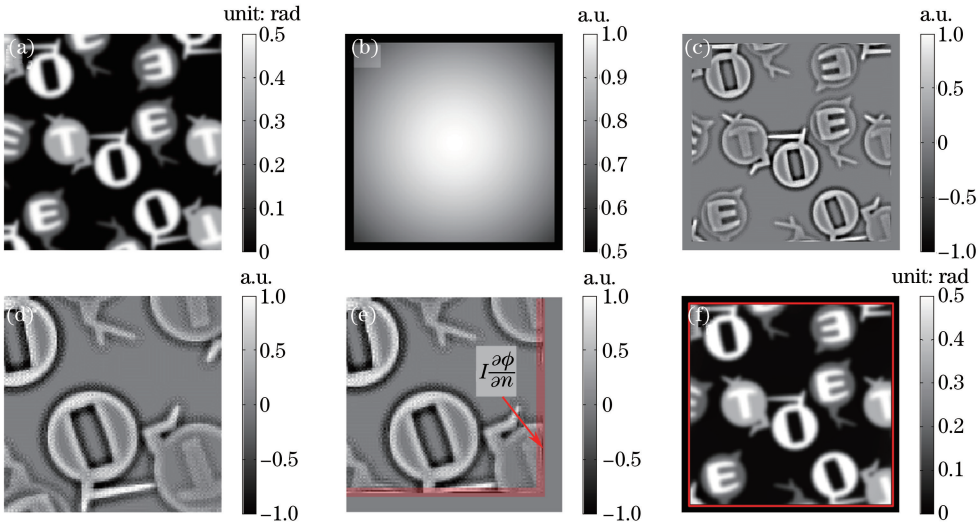

图 5　复杂物体延伸到图像边界时基于离散余弦变换的光强传输方程求解方法的仿真结果。(a) 相位分布;(b) 光强分布(引入了矩形光阑);(c) 轴向光强微分;(d) 图 4(c)右下角放大(没有光阑的情况);(e) 图 5(c)右下角放大(有光阑的情况,边界信号清晰可见,见红色阴影区域);(f) 基于离散余弦变换法恢复得到的相位(非齐次 Neumann 边界条件,红框勾勒出了光阑边界)

Fig. 5 Phase retrieval simulation for a complex object covering the image boundary with the DCT-based method. (a) Phase distribution; (b) intensity distribution (with a square aperture); (c) axial intensity derivative; (d) enlarged region corresponding to the lower right quarter of Fig. 4(c) (without an aperture); (e) enlarged region corresponding to the lower right quarter of Fig. 5(c) (boundary signals can be clearly observed along the aperture edge shown in the red shaded area); (f) phase retrieved by the DCT-based method (inhomogeneous Neumann boundary conditions, the red box outlines the aperture edge)

基于离散余弦变换的光强传输方程求解方法虽可在非齐次 Neumann 边界条件下对光强传输方程进行求解,但是快速算法仅限于方形光阑区域,在非矩形或不规则光阑区域下无法使用。针对此问题,2015 年,Huang 等[97]提出了基于迭代离散余弦变换的求解方法,该方法将离散余弦变换的求解结果作为初始值,采用多次迭代补偿的方法进行修正,最终得到任意孔径区域下的精确解。最近,Parvizi 等[98]提出手动选取样品中平滑区域的方法,校正光强传输方程中采用不正确边界所造成的求解误差。

3.2　相位差异的成因与补偿

光强传输方程的求解中另一大关键问题是求解算法中存在的相位差异,即求解得到的相位与真实值之间存在求解误差。这是由于大部分光强传输方程的求解算法,如快速傅里叶变换法与离散余弦变换法,都借助了 Teague 辅助函数[(8)式]将光强传输方程转换为标准的泊松方程简化求解[43]。然而 Teague 辅助函数

不一定存在。因为 Teague 假设的本质是认为 $I\nabla\phi$ 是一个保守场，可以表示为 ψ 的梯度，但由于 $I\nabla\phi$ 本身只是一个普通的二维标量场，并不一定是保守场。物理学中，迭代时间平均坡印廷矢量场并不一定是一个保守场。因此求解光强传输方程得到的解不一定与真实的精确解相吻合。该问题早在 2001 年已被 Allen 等[90]指出，10 年后 Schmalz 等[99]基于亥姆霍兹分解定理对此问题进行了较为详细的理论分析，并提出了一个仿真反例证明了采用 Teague 辅助函数带来的相位差异均方根值可高达 9%。2014 年，Zuo 等[80]采用类似的方法分析了相位差异的成因，推导了采用 Teague 辅助函数可获得精确解的充要条件，即

$$\nabla I(\boldsymbol{r})^{-1}\times\nabla^{-2}\{\nabla\cdot[\nabla I(\boldsymbol{r})\times\nabla\phi(\boldsymbol{r})]\}=0。\tag{14}$$

(14)式表明，在某些特定的情况下，如聚焦面光强分布十分均匀时，Teague 辅助函数所带来的相位差异很小，可以忽略。而对于强吸收物体而言，相位差异往往较大。Zuo 等[80]提出了一种类 Picard 型迭代法对此误差进行补偿，Shanker 等[100]也提出了类似的补偿方法。该方法的基本思想是先利用快速傅里叶变换法或离散余弦变换法求解得到一个非精确解，再将非精确解重新代入光强传输方程的右端计算得到光强轴向微分信号，将该信号与实测的光强微分之差作为误差函数重新代入光强传输方程求解，得到相位误差补偿项。将该相位误差补偿项与原始的不精确解相加，完成一个回合的迭代补偿。这个过程反复迭代执行，直至满足终止条件，此时得到光强传输方程的精确解。

4　光强轴向微分的差分估计

4.1　基于双平面的光强轴向微分估计

求解光强传输方程需要预先获得光强的轴向微分，该量不可直接测量，需要通过数值有限差分得到。Teague[43]于 1983 年提出通过采集两幅轻微离焦图像，使两幅图像相对于中心聚焦图像的离焦距离相等且方向相反，利用中心有限差分法估计获得光强的轴向微分，即

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z}\approx\frac{I(\boldsymbol{r},\Delta z)-I(\boldsymbol{r},-\Delta z)}{2\Delta z}。\tag{15}$$

本节将光强函数显式地表示为离焦距离 Δz 的函数。基于双平面的有限差分公式(15)式近似微分，计

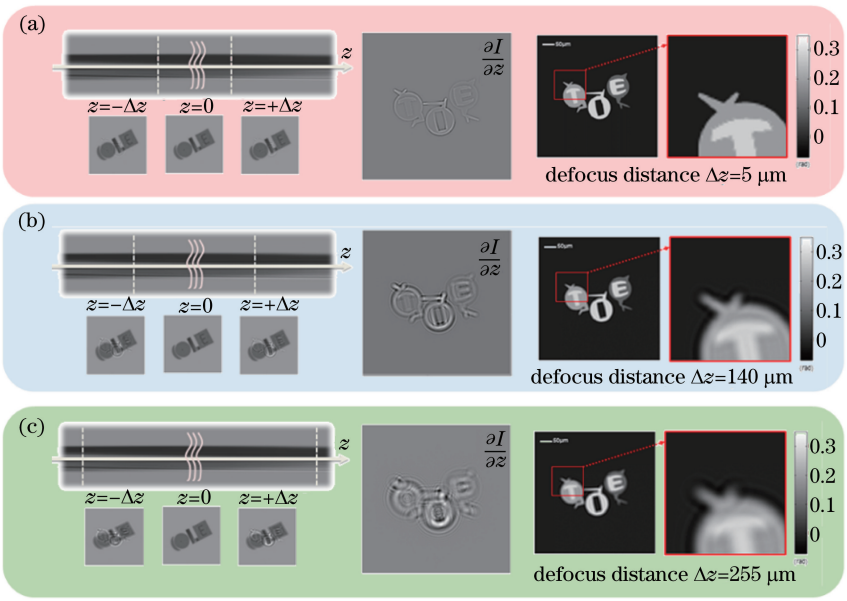

图 6　无噪声情况下离焦距离对光强传输方程相位恢复的影响(红框内区域为对应所选区域的放大)。(a) 小离焦距离下的原始光强图像(左)，由两幅图像差分估计得到的光强轴向微分(中)以及恢复的相位分布(右)；(b) 中等离焦距离下的相应结果；(c) 大离焦距离下的相应结果

Fig. 6　Effect of defocus distance on the TIE phase reconstruction under noise-free condition (the square areas outlined with red lines are magnified for clarity). (a) Small defocus distance: original intensity image (left), axial intensity derivative (middle) and recovered phase distribution (right); (b) medium defocus distance; (c) large defocus distance

算简单便于实施，因此得到广泛应用[101-103]。但同时也带来了一个问题，即离焦距离 Δz 取多大值得到的差分结果用于近似微分是合理的。在无噪声的理想情况下，这个问题的答案显而易见。如图 6 所示的仿真结果，离焦量 Δz 越小，差分逼近的精度越高，相应地，重建相位的空间分辨率也越高。但是当 Δz 变大后，(15)式中差分逼近的准确性随之下降，表现为重建相位的空间分辨率的下降，即出现相位模糊现象，如图 6(c)所示。相位模糊有时又称为非线性误差，这是因为(15)式本身利用局部线性近似逼近光强轴向微分，而 Δz 的增加直接导致实际信号中非线性项产生误差的增加。因此从数学角度而言，应该尽可能地减小 Δz，从而提高差分逼近的精度。

实际测量中存在的噪声、探测器的量化效应等因素使该光强微分估计问题复杂化，如图 7 所示。在含噪声的情况下，Δz 不能取得太小，否则光强微分估计会被噪声淹没，如图 7(a)所示。此时重建相位中出现严重的云雾状低频噪声，为了提高信噪比，不得不增大 Δz，如图 7(b)所示。但是 Δz 取值过大时，相位模糊作用越发明显。所以在有噪声的情况下，必须权衡噪声与非线性误差，选取最优的离焦距离。显然这个最优的离焦距离一定与噪声水平和物体本身的特征密切相关。

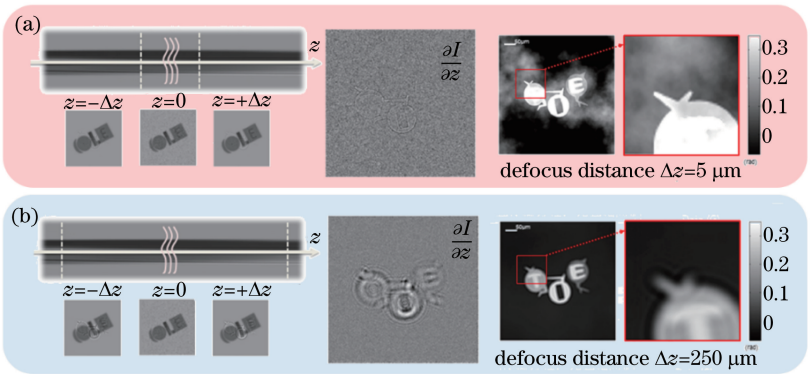

图 7　有噪声情况下离焦距离对光强传输方程相位恢复的影响(红框内区域为对应所选区域的放大)。(a) 小离焦距离下的原始光强图像(左)，由两幅图像差分估计得到的光强轴向微分(中)以及恢复的相位分布(右)；(b) 大离焦距离下的相应结果

Fig. 7　Effect of defocus distance on the TIE phase reconstruction in the presence of noise (the square areas outlined with red lines are magnified for clarity). (a) Small defocus distance: original intensity image (left), axial intensity derivative (middle), and recovered phase distribution (right); (b) large defocus distance

光强轴向微分估计中离焦距离的选择自光强传输方程诞生之初就受到广泛关注，Teague[43] 于 1983 年提出光强传输方程恢复相位方法时，已经注意到非线性项和测量噪声对传输距离选取的影响。随后 Roddier[104] 从几何光学近似出发，给出了波前曲率传感器离焦量选择应满足的条件。Soto 等[105] 分析了高阶项对波前曲率探测的影响，在考虑光强测量噪声的条件下，针对不同的测量像差给出了曲率传感器的最佳传输距离。Paganin 等[102] 系统地研究了光强传输方程中的噪声效应，分析了离焦距离的选择对恢复结果的影响。Martin 等[106] 利用仿真实例对比说明了光强传输方程中离焦距离与物体最高空间频率及噪声的相关性。Huang 等[107] 采用频率分析方法综合研究了非线性误差和光强测量噪声带来的影响，给出了离焦距离的选取准则。尽管上述工作的侧重点与分析手段略有不同，但是最终得到的结论大致相同，即为了获得较为准确的测量结果，离焦距离必须综合考虑噪声水平与非线性效应，离焦距离上限由物体的最高空间频率决定，而下限由光强测量噪声决定。在噪声条件下，需要选取足够大的离焦距离以抑制噪声的影响。但离焦距离过大会使相位的高频信息超出线性范围，从而带来非线性误差。因此选择离焦距离时应该尽量平衡这两方面的影响。这与图 7 所示的仿真结果相符，噪声的影响主要体现在离焦量较小的时候。随着离焦量的增加，噪声影响减小，而非线性误差却随之增加。可以想象，在某种情况下非线性误差与低频误差都较小(此时测量误差最小)，此时的距离为最佳离焦距离。实际情况中噪声水平与物体的空间频率这两方面的先验知识往往在测量前都难以预知。此外当物体同时包含高频与低频信息且噪声较为严重时，经常会出现一种不可调和的情况，即由光强测量噪声决定的离焦距离下限会超过由物体最高空间频率决定的离焦距离上限。简单地说，相位低频成分受噪声的影响较大，但对非线性误差不敏感，因此倾向于选取较大的离焦距离。相反

地，相位高频信息受非线性效应的影响较大，但具有较高的信噪比，因此倾向于选取较小的离焦距离。二者的矛盾往往不可调和，不得不做出某种妥协，使误差尽可能降低。但在此种特殊情况下，无论如何选择离焦量，基于双平面的轴向微分估计方法都不可能准确恢复物体相位。

4.2 基于多平面的光强轴向微分估计

考虑到双平面的轴向微分估计方法中仅采用两个平面的光强信息，其中唯一可控的参数为离焦距离。为了解决上述问题，许多研究人员提出采用多面（多于两个平面）强度测量估计轴向微分，更灵活地校正非线性误差或者降低噪声的影响。给定 $2n+1$ 个测量平面的光强 $I(\boldsymbol{r}, i\Delta z)$，$i=-n,\cdots,0,\cdots,n$，基于多平面的光强轴向微分的差分公式均可表示为

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{r})}{\partial z} \approx \sum_{i=-n}^{n} \frac{a_i I(\boldsymbol{r}, i\Delta z)}{\Delta z}, \tag{16}$$

式中 a_i 为权重系数，不同方法之间的区别大多都集中于 a_i 的选取方式上。高阶有限差分法首先由 Ishizuka 等[103]提出，随后 Waller 等[108]进行系统归纳。高阶有限差分法的核心思想是通过增加光强测量以更好地逼近光强轴向微分中的高阶泰勒展开项。当存在噪声时，高阶有限差分法往往对噪声十分敏感。为了更有效地利用多个平面的光强测量抑制噪声的影响，Soto 等[109]提出了噪声抑制有限差分法。该方法通过忽略所有泰勒展开项中的高阶项，并最小化噪声效应推导得到。在高阶有限差分法中，越靠近中心平面光强，系数越要尽可能大，这是为了更好地估计逼近光强轴向微分中的高阶项。噪声抑制有限差分法的目的是最小化系数的平方和，即希望越靠近中心平面的光强，系数越小。这两种方法在某种意义上是矛盾的。为了调和这种矛盾，Bie 等[70]结合上述两种方法提出了噪声抑制高阶有限差分法，同时考虑噪声的泰勒展开式中高阶项与噪声的影响。对于采用 $2n+1$ 个平面的光强测量，噪声抑制高阶有限差分法仅将高阶项考虑到第 m 阶（$m<2n+1$），为噪声抑制（降低噪声抑制因子）留下了一些自由度。除了这些基于有限差分的方法，Waller 等[108]还建议采用最小二乘拟合法处理该问题，即将每个像素在不同平面上的光强测量值看作一个离散点列，通过最小二乘法对其进行曲线拟合。调整最小二乘法拟合的阶数，尽可能准确地拟合出光强轴向区间内的变化曲线，可以同时抑制高阶误差与噪声效应。拟合最终可以得到每个位置处的光强随离焦距离变化的解析表达式，光强在中心处的轴向微分值便可以很容易地计算得到。

上述 4 种方法是基于多平面的光强轴向微分估计典型方法。总体而言，基于多平面的方法在高阶误差与噪声抑制方面性能比双平面法有所提高，在某些特定情形下也获得了良好的效果，但研究人员发现，上述多平面方法的实际表现非常依赖于噪声水平与所测物体的空间频率特性[70,72,110]。给定一组强度数据时，选取一种最适合的方法非常困难。对于噪声抑制高阶有限差分法与最小二乘拟合法，还需要确定逼近（拟合）的阶次，这似乎与双平面中如何选择最佳离焦量的问题如出一辙。因此建立一种基于多平面的轴向微分估计方法的理论框架从而更加系统地理解、分析、比较，甚至尽可能地改进现有方法是十分必要的。针对此问题，Zuo 等[111]提出了基于 Savitzky-Golay 差分滤波器（SGDF）的统一化框架理论。Savitzky-Golay 滤波器由 Savitzky 与 Golay[112]于 1964 年提出，他们证明了一组离散数据点经最小二乘拟合后，仅针对区间内的单个点进行分析，此过程等价于用一个固定的冲击响应函数（即 Savitzky-Golay 滤波器）对原始数据点进行离散卷积。Zuo 等证明现存的光强轴向微分估计方法（包括双平面与多平面法）都是 Savitzky-Golay 差分滤波器的特例，具体而言，高阶有限差分法等价于 $2n$ 阶 Savitzky-Golay 差分滤波器，噪声抑制有限差分法等价于 1 阶 Savitzky-Golay 差分滤波器，而噪声抑制高阶有限差分法等价于 m 阶 Savitzky-Golay 差分滤波器（$m<2n+1$）。

将所有光强轴向微分估计方法归结到 Savitzky-Golay 差分滤波器框架下的优点在于仅需要分析 Savitzky-Golay 差分滤波器，即可系统地研究与对比这些看似不同却又实质相同的光强轴向微分估计方法的特征与优缺点。通过分析 Savitzky-Golay 差分滤波器的频域响应发现，在这些差分格式各不相同的多平面光强差分估计方法中，低频云雾状噪声与高阶非线性误差的矛盾仍然存在。高阶滤波器在频域响应上接近理想微分滤波器，但是对噪声非常敏感。虽然低阶滤波器高频部分的响应有所衰减，但是固有的低通滤波作用却对噪声具有较强的抵抗力。这其实是将离焦距离选择的矛盾转化为滤波器阶次选择的矛盾，并未从根本上解决低频噪声与高阶误差之间的矛盾。针对此问题，Zuo 等[111]在 Savitzky-Golay 差分滤波器统一化

框架理论的基础上提出了最优频率选择法。该方法的基本思想是采用频域滤波的方式，提取不同阶次Savitzky-Golay差分滤波器重建相位中的最优空间频率成分，组合成为最优重建相位结果。仿真结果如图8所示[111]，这种频域分解、最优滤波、再重组的方式有效解决了传统方法中低频云雾状噪声与高阶非线性误差难以兼顾的矛盾，避免了固定阶Savitzky-Golay滤波器中难以确定滤波器阶次的问题，有效提升了光强传输方程的抗噪性与相位重建的准确性。值得注意的是，Zuo等最初推导最优频率选择法时采用了一阶波恩近似，这就意味着待测物的振幅与相位不能太大[50,102,113]。该近似是个较强的假设，会在后续文献中证明，最优频率选择法仅依赖于较弱的缓变相位假设即可推导得到[84]。另一方面，Zuo等在推导中还假设照明是完全空间相干的，但最优频率选择这个思想不仅局限于空间相干照明，2014年，Jenkins等[114]将最优频率选择法推广到部分相干照明的场合，更加完善地考虑了光源的部分相干性对相位重构的影响。同年，Zhong等[115]指出当轴向离焦距离间隔遵循指数分布时，可以有效减少所需图像的采集数量，且并不损失重构精度。

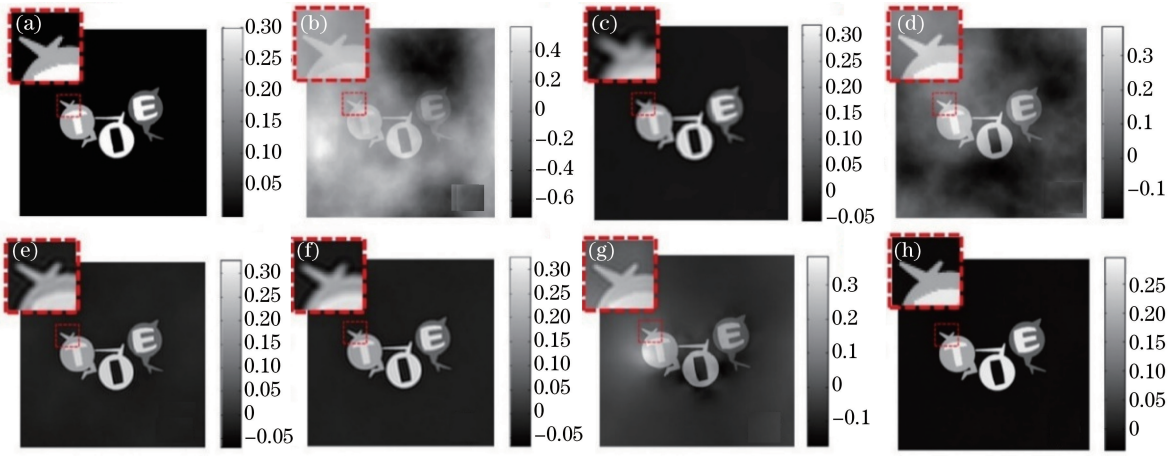

图8　不同差分估计方法在噪声下的相位重建仿真结果对比(左上角图像为对应红色方框区域的放大)。(a) 原始相位分布；(b) 传统双平面法，两平面间距为20 μm (均方根误差RMSE：0.2552)；(c) 1阶Savitzky-Golay差分滤波器(RMSE：0.0128)；(d) 31阶Savitzky-Golay差分滤波器(RMSE：0.0651)；(e) 7阶Savitzky-Golay差分滤波器(RMSE：0.0092)；(f) 传统双平面法，两平面间距为100 μm (RMSE：0.0115)；(g) 自适应Savitzky-Golay差分滤波器法(RMSE：0.0453)；(h) 最优频率选择法(RMSE：0.0020)

Fig. 8 Phase recovery comparison of synthetic noisy test data (the small square areas with red dot lines are magnified for clarity). (a) True phase; (b) traditional TIE using two planes separated by 20 μm (RMSE: 0.2552); (c) 1st fixed degree SGDF (RMSE: 0.0128); (d) 31st fixed degree SGDF (RMSE: 0.0651); (e) 7th fixed degree SGDF (RMSE: 0.0092); (f) traditional TIE using two planes separated by 100 μm (RMSE: 0.0115); (g) adaptive-degree SGDF (RMSE: 0.0453); (h) optimized frequency selection (RMSE: 0.0020)

光强轴向微分的最优估计问题与X射线衍射成像中的衬度传递函数理论和传统显微学中光学传递函数理论密切相关。传递函数理论可以定量分析相位衬度与离焦距离的定量关系，从而为算法参数的优化设计提供理论指导。早在2002年，Barone-Nugent等[116]基于Striebl[117]的三维光学传递函数理论详细分析了弱相位物体在光学显微镜下图像的形成与表征，肯定了光强传输方程在低空间相干性照明下的适用性。同年Sheppard[118]采用类似方法分析光强传输方程在玻恩近似下的表现形式，并指明光强轴向变化率的低频部分应与波前相位的二阶导数成比例，结论与Roddier分析的均匀强度下光强传输方程一致[55-59]。Guigay等[119]于2007年将X射线衍射成像中的衬度传递函数法与光强传输方程法相结合，在小离焦范围内算法退化为光强传输方程，而大离焦下算法更加偏向于衬度传递函数法，使算法能够适用于多种离焦距离。2011年，Kou[120]提出利用反卷积光学传递函数法实现定量相位恢复，在部分相干照明下精度高于光强传输方程法。2015年，Jenkins等[121]将反卷积光学传递函数法推广到多个测量平面的情形。同年，Martinez等[122]与Sun等[123]也分别基于相位衬度传递函数对多平面光强传输方程求解中的离焦距离选择及传递函数合成等进行了分析与优化。

5　部分相干照明成像

5.1　部分相干照明下的相位恢复

不论部分相干光、完全相干光还是完全非相干光，光波场的光强都是直接可测的，其实后两者也是部分相干光的极端特例，但相位的意义仅限于完全相干光的范畴。严格意义上讲，任何物理可实现的光源都不是严格相干的。此外，光强传输方程自诞生起即应用于自适应光学、X 射线衍射成像、透射电子显微成像与中子射线成像领域[50,55-61]。这些领域中照明的相干性远不及光学频段的激光理想，具体表现在光源的光谱宽度以及物理尺寸两方面。即使在可见光显微成像领域，部分相干照明对于提高成像质量、抑制相干噪声也具有重要意义。Teague 推导光强传输方程时也是基于完全相干的假设，即单色相干光[43]。所以严格意义上说，Teague 的光强传输方程难以解释或者不能直接应用于部分相干成像的场合。但从文献报道来看，大部分情况下，即使采用非严格相干光源光强传输方程也能重构出不错的再现像，很久以来这都是一个令人迷惑的问题。

光强传输方程解释部分相干光的最大障碍在于部分相干光场没有明确适定的相位概念。对于部分相干光，二维复振幅函数已不足以完整描述光波场的性质。由于部分相干光本身的维度大大高于完全相干光，需要通过光场空间内任意两点的四维互相关函数、互谱密度来描述，或者等价地采用相空间中的(四维)维格纳函数或者模糊函数来表征[124-125]。因此，相位的定义必然与传统意义上相干光场下的定义存在差异。Streibl[126]首次针对此问题进行了讨论，于 1984 年采用互强度分析了部分相干照明下的成像过程，并证明了采用光强传输方程进行相位成像的可能性。因为当时尚未发表行之有效的求解光强传输方程的数值方法，Streibl 并未直接给出利用光强传输方程进行相位恢复的实验结果，但是这项工作极具开创性，因为他首次指出光强传输方程在空间部分相干照明下的有效性，即当拓展光源关于光轴对称分布时，可以通过求解光强传输方程获得物体的相位分布。这也为后来光强传输方程在部分相干光学显微成像中的进一步应用奠定了初步的理论基础。1998 年，Paganin 等[44]重新解释了部分相干光场中的相位，指出相位是一个标量势函数且梯度对应于时间平均的坡印廷矢量。此项工作的重要性在于其开创性地赋予相位一个更加广泛且富有意义的新定义，为后续采用部分相干照明的相位恢复方法提供了简单合理的物理依据。由于没有给出部分相干光场的坡印廷矢量的严格定义或明确的数学表达式，该定义只适用于定性解释，无法实现定量分析。2004 年，Gureyev 等[127]基于多色光场的谱分解提出了广义程函理论，结论表明，当光源的光谱分布已知时，即使部分相干照明下也可通过求解光强传输方程获得准确的相位分布。同年 Gureyev 等[128]基于互谱密度定量分析了部分相干照明对基于光强传输方程的相位成像过程的影响，推导得到光源谱宽或线度(Schell 模型)会对重构图像产生卷积效应(相位模糊)。当相干性并不太差时，由于光源谱宽或光源尺寸所致卷积效应并不明显，得到的相位分布仍然可以很好地反映成像物体的真实结构。这也解释了为什么有时光强传输方程采用非严格相干光源也能得到不错的再现像。当相干性较差时，提出了采用两次测量以及反卷积的方法补偿部分相干性引入的测量误差。2010 年，Zysk 等[64]基于相干模式分解思想对空间部分相干照明下的相位恢复进行了分析，证明部分相干照明下求解光强传输方程得到的相位实际上是各个相干模式下相位的加权平均。2014 年，Petruccelli 等[65]采用互谱密度分析了部分相干照明下基于光强传输方程的相位成像过程，提出了采用两次测量的方法补偿空间部分相干性引入的测量误差，最终所得结论与 Streibl 等的结果相吻合[126,128]。上述研究工作定量阐明了部分相干光场下相位的物理意义，证明了光强传输方程在部分相干照明下的适用性。然而，由于引入了互强度、互谱密度等物理量描述光波场的传播与衍射，数学表达较为复杂，最后获得的结论很难有直观的物理解释。2015 年，Zuo 等[129]以相空间光学理论作为切入点，基于维格纳函数所遵循的刘维尔传输方程[130]推导得到广义光强传输方程，作为传统光强传输方程在部分相干光波场下的拓展形式，即

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{x})}{\partial z}=-\nabla_x\cdot\iint\lambda\boldsymbol{u}W_\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\omega,\tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为对应于空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 的空间频率坐标，$W_\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 为部分相干光波场中单色成分的四维维格纳分布函数(WDF)，光学频率 $\omega=c/\lambda$(c 为光速，λ 为光波波长)。在准单色近似下(空间部分相干光场)，广义光强传输方程可简化为

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{x})}{\partial z}=-\lambda\nabla_x\cdot\int\boldsymbol{u}W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}。\tag{18}$$

由(18)式可知,广义光强传输方程将光强轴向微分与维格纳函数一阶频率矩的横向散度之间建立关联,而部分相干光场下相位(定义为广义相位)的梯度则自动与维格纳函数的一阶条件空间频率矩(在信号处理领域又称为瞬时频率)相关联[131],即

$$\frac{\int\boldsymbol{u}W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\int W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2\pi}\nabla_x\phi(\boldsymbol{x})。\tag{19}$$

(19)式表明,广义相位被定义为一个标量势,其梯度为维格纳函数的一阶条件频率矩。从分布的角度而言,广义相位的梯度代表了光波场中某一个空间位置的平均频率。此外,维格纳函数的时频联合描述特性与几何光学中光线的概念极其相似。光线是对光的能量(坡印廷矢量)的幅度及其传播方向的一种描述,按照这种关联性,$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$代表了通过点$\boldsymbol{x}$、空间频率(传播方向)为$\boldsymbol{u}$的光线的能流密度(即光场)。(19)式指出维格纳函数的条件频率矩是系综平均意义下的归一化横向坡印廷矢量[44]。基于广义光强传输方程对部分相干照明下的成像过程进行定量分析,Zuo 等[129]推导得到如下结论:

1) 在主级光源关于光轴对称的前提下,可以通过单次测量并求解光强传输方程获得部分相干照明下物体的相位分布;而当主级光源不对称时,可以先求解光强传输方程测出照明光的相位分布,并在测量物体时减去即可消除光源的影响;

2) 考虑实际成像系统的有限孔径效应时,适当提高照明的空间相干性(相干参数控制在 0.3～0.4)有助于提高相位恢复的准确度,但同时也降低了成像系统的极限分辨率;

3) 利用维格纳函数作为连接物理光学与几何光学的一座桥梁,将广义光强传输方程的应用范围拓展到光场成像领域,可实现空域平稳照明下缓变物体的高分辨率计算光场成像。

5.2　基于光强传输方程的计算光场成像

光强传输方程最少需要一副额外的离焦光强图像(一幅聚焦面,一幅离焦面)即可恢复出相位信息。从信息量角度来看这是合乎逻辑的。因为光波场的复振幅仅定义在二维平面上,采用离焦光强图像的信息置换出相位信息在信息量上是守恒的。因此采用四维相空间表征二维完全相干光场时数据显然是高度冗余的。对于一个缓变物体,相空间的冗余性将变得更加明显,因为信号在相空间仅仅占据一个二维切面[129]:

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{x})\delta\left[\boldsymbol{u}-\frac{1}{2\pi}\nabla\phi(\boldsymbol{x})\right]。\tag{20}$$

此时维格纳函数严格大于 0,这种形式的维格纳函数代表了物体真实的能量概率密度分布,表明通过某点 $\boldsymbol{x}$ 的光线(能流)仅沿一个方向传播,且该方向由相位梯度(法线)所决定。这一性质使得相位测量可以通过光线方向的测量得以实现,如夏克-哈特曼波前传感器[11]。图 9 所示为一个平滑相干波前(球面波)的维格纳分布以及光场分布的一维示意图。可以发现,光线的传播方向垂直于波前的相位梯度方向,维格纳分布中空间频率与光场中光线传播角度之间的联系可以简单概括为 $\boldsymbol{\theta}\approx\lambda\boldsymbol{u}$。

对于部分相干光而言,情况要复杂得多。部分相干光场的四维维格纳函数一般是非冗余的。通过两幅

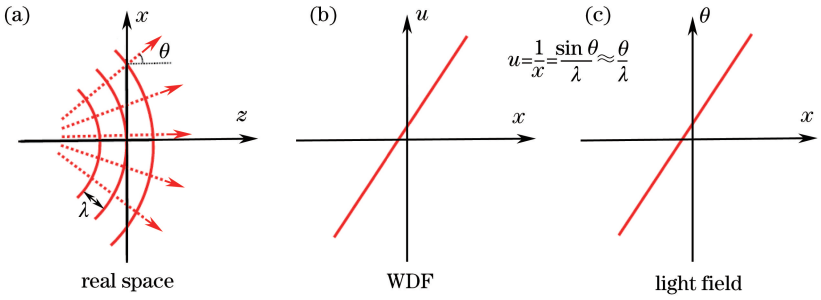

图 9　平滑相干波前(球面波)的维格纳分布以及光场分布的一维示意图

Fig. 9　Visualization of a smooth coherent wavefront and its corresponding WDF and light field

光强图求解光强传输方程不足以提供足够的信息量以恢复部分相干光场的全部信息。完整四维互相干函数(或等价的四维维格纳函数)的测量与恢复一直是研究热点。相关方法包括:基于互相关函数的定义利用干涉进行测量[132];采用相空间断层扫描的方法[133],即在待测光场中引入非对称光学元件(柱面透镜),大量采集不同传播距离处的光强数据,通过类似传统断层扫描的方式重建完整的四维维格纳函数;基于维格纳函数的空频联合分布特性,进行空域或频域加窗扫描测量[134]等。

从几何光学角度而言,对于部分相干光,通过空间中某点 $\boldsymbol{x}$ 的光线(能流)不仅沿一个方向传播。光线散开为二维分布,这也解释了为什么部分相干光本身具有较高的维度。光场相机作为夏克-哈特曼波前传感器在计算机图形界的对应变体,可以对光线的空间位置及其角度分布进行联合测量[135]。光场这个术语在计算机图形相关文献中通常用来表示光线的集合,通过四维变量 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ 表征,其中 $\boldsymbol{x}$ 为光线所处的空间位置,$\boldsymbol{\theta}$ 为通过空间某点处所有光线的角分布[136-137]。在光学范畴内,该术语对应的物理量应该是辐射学中的辐亮度。早在 1968 年,Walther 等[138]采用辐亮度作为相空间物理量的等价量为光度学奠定了严格的物理光学基础。2009 年,Zhang 等[139]进一步阐明了几何光学近似下光场与维格纳函数的等价性,即 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\approx W(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{u})$[图 9(b)、(c)]。由于光场成像获得了所有光线的强度及角度分布,等价于获得了四维维格纳函数分布(相当于四维互相干函数),因此光场成像本身也可以作为一种相干测量与恢复。部分相干光的传播衍射等均可以被完全表征。这在几何光学对应的光场成像中表现为在任意改变焦点或观察视角等条件下,利用光线追迹法计算各种合成图像。相比于传统成像方法,光场成像装置需要微透镜阵列[图 10(b)][140],较为复杂,且为了获取额外的角分辨信息严重牺牲了成像分辨率。

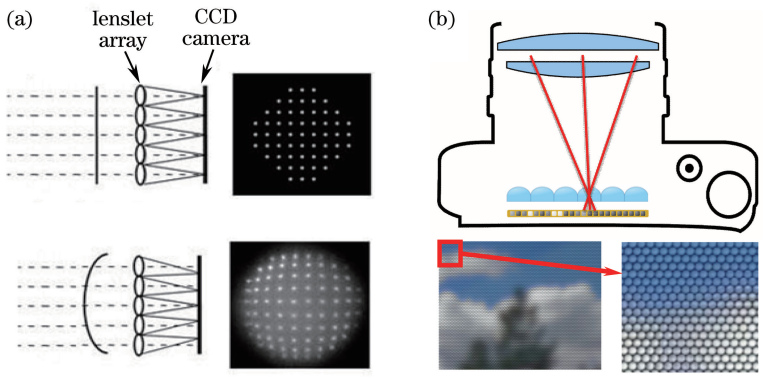

图 10　夏克-哈特曼波前传感器与光场相机的原理图。(a) 夏克-哈特曼传感器;(b) 光场成像

Fig. 10　Scheme for Shack-Hartmann sensor and light field imaging. (a) Shack-Hartmann sensor; (b) light field imaging

虽然光强传输方程无法恢复四维光场的全部信息,但是能够提供许多光场信息。对于干涉测量而言,相位信息完全蕴含在干涉条纹中,没有条纹就无法恢复相位信息。但对于光强传输方程而言,只需测量光强的传播即可恢复相位,光强永远是可测的,与光源是否相干无关,这为光强传输方程提供了更广阔的应用背景。对于非严格相干的光波场,求解光强传输方程得到的是广义相位[(19)式],其梯度为维格纳函数的一阶条件频率矩。在几何光学近似下,维格纳函数等价于光场 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\approx W(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{u})$,将其代入(19)式可得几何光学近似下的广义相位[129],即

$$\frac{\int \boldsymbol{\theta} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\int L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}=k^{-1}\nabla\phi(\boldsymbol{x})\,。\tag{21}$$

(21)式左侧为光场重心,即通过空间某一位置的光线角度的加权平均。通过(21)式,Zuo 等[129]提出并通过实验验证了两个观点:

1) 四维光场中包含了二维相位信息,通过光场成像可以直接进行相位重构,相位梯度可以简单地通过对原始光场图像中每个子孔径图像进行重心检测得到,这与夏克-哈特曼传感器中的标准处理步骤别无二致;

2) 求解光强传输方程虽然无法重构完整光场,但可以获得光场的一阶矩即重心。

在某些简单的情形下，如空域平稳照明下的缓变物体，四维光场高度冗余。如图 11 所示，样品为一个无散系统，并不改变入射光场的角分布（由主级光源光强决定），仅可整体移动入射光程。在光源分布已知的前提下，求解光强传输方程可实现四维光场的完全重构[129]。

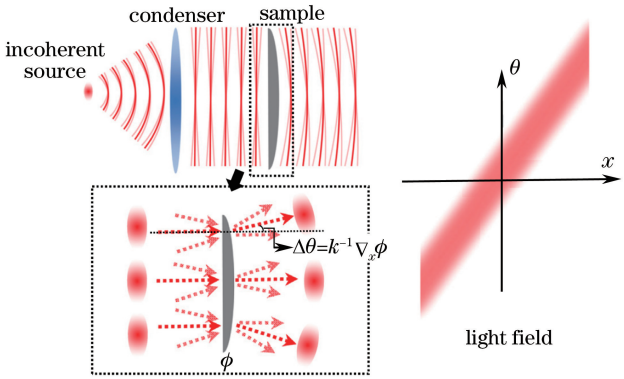

图 11　缓变物体在空域平稳照明下的光场表示

Fig. 11　Light field representation of a slowly varying object under spatially stationary illumination

严格来说，首次采用光强传输方程进行计算光场成像的是 Orth 等[140-141]于 2013 年提出的光场矩成像。研究发现采用两幅不同焦面的光强图像通过求解一阶偏微分方程（当时并不知晓该方程是光强传输方程）可以近似重构场景多个视角的图像。这里的“矩”是指该方法只能获得光场的一阶矩，无法获得完全的光场信息。为了获得完整的四维光场，Orth 等假设光场的角分布符合高斯模型从而填充缺失的数据。该做法虽然在物理学上缺乏依据，却在实验上达到了较好的视觉效果。2014 年，Zuo 等[82]发表评论指出光场矩成像实际上是光强传输方程在几何光学近似下的变体，任何关于光强传输方程的求解与轴向微分估计算法均可直接移植到光场矩成像中。2015 年，Liu 等[142]采用基于多平面光强测量的高阶有限差分法优化光强轴向微分估计，提高了光场矩成像的信噪比。

6　光强传输方程在光学显微成像中的应用

本节将重心偏向于光强传输方程的实验系统与具体应用。6.1 节介绍了光强传输方程的传统实验装置。传统实验装置中，为了采集多个与光轴垂直的平面上的光强图像，需要移动待测物体或者相机平面，非常不便且十分耗时。6.2 节回顾了光强传输方程实验装置的若干改进方案，这些方案的特点在于可以避免采集强度图像时引入的机械移动，可以应用于动态成像场合。6.3 节回顾了光强传输方程在光学显微成像中的应用，并给出了具有代表性的实验结果。

6.1　基本光路结构

光强传输方程法需要采集不同离焦面上的光强信息。为了采集这些离焦光强图像，通常需要采用一个 $4f$ 系统对物体成像，光路结构如图 12(a)所示。由于 $4f$ 系统中物像呈严格共轭关系，所以通过移动物平面或者移动图像平面（相机）都可以获得物体离焦面上的光强信息。这两种方式在本质上是等价的，但考虑横向与轴向放大率之间的关系，物面离焦距离与像面离焦距离之间的比例系数为 f_2^2/f_1^2。对于光学显微镜而

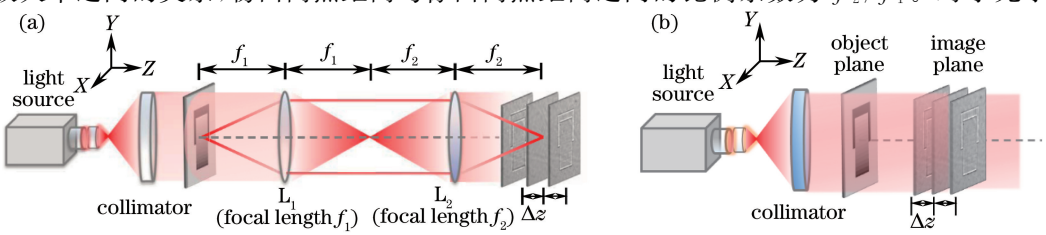

图 12　光强传输方程采用的传统实验装置原理图。(a) 基于 $4f$ 系统的含透镜成像光路；(b) 无透镜成像光路

Fig. 12　Scheme for conventional optical configurations for TIE phase imaging.

(a) $4f$ system-based system; (b) lens-less system

言，如果是无限远校正的远心光学系统，则光路结构与图 12(a)相同。图 12(a)中准直透镜相当于无穷远校正显微镜中的聚光镜，而透镜 L_1 相当于显微镜中的显微物镜，透镜 L_2 相当于显微镜中的镜筒透镜，f_2/f_1 即为显微镜的放大率。无需对显微镜进行任何改造即可直接将采集的图像用于光强传输方程相位恢复。光强传输方程也可采用图 12(b)所示无透镜成像光路结构，该结构中拍摄的光强图像均位于离焦平面。最终重构的相位也位于该离焦面上，还需要进行额外数值反衍射才能重构物面的复振幅信息。

6.2　动态成像光路结构

光强传输方程的传统光路结构采集图像时需要移动待测物体或探测器，必然会降低数据采集的速度，使其难以应用于高速、动态甚至实时测量场合。针对这一问题，近年来关于改进光强传输方程法强度记录方式的研究层出不穷，共同目的是避免强度图像采集中引入的机械移动。Blanchard 等[143]在成像透镜前放置了一个二次扭曲光栅，使成像系统单帧能够采集三个不同焦面的光强图像[图 13(a)]。Waller 等[53]提出利用显微镜中固有的色差效应实现单次彩色图像曝光，获取三幅聚焦位置不同的图像；还提出了基于体全息布拉格光栅选择特性分束形成多幅不同聚焦面的强度图像[图 13(b)]。Almoro 等[47]通过在 $4f$ 成像系统的傅里叶平面放置空间光调制器实现非机械离焦[图 13(c)]。Gorthi 等[54]使细胞样品顺次通过倾斜放置的流式细胞仪，在细胞移动的过程中相机可获得一系列位于不同焦面的光强图像[图 13(d)]。Martino 等[144]通过分束镜与多次反射实现单次记录两幅不同聚焦深度的光强图像[图 13(e)]。

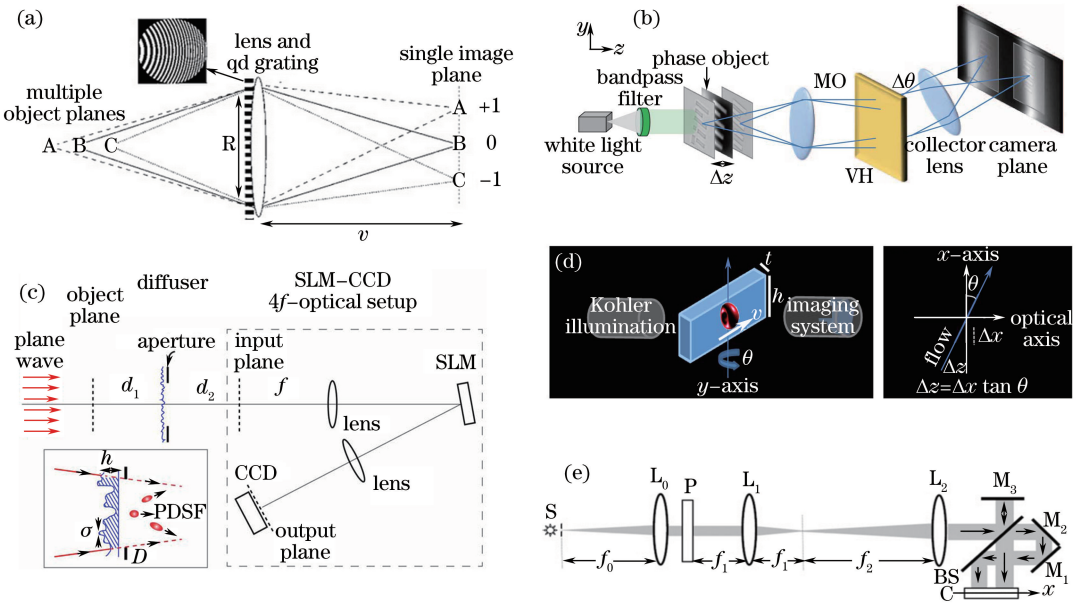

图 13　光强传输方程实验装置的若干改进方案

Fig. 13　Several improved optical configurations for TIE phase imaging

光强传输方程成像结构兼容无限远校正的光学显微镜，因此可以在显微镜相机接口处附加光路以实现动态相位成像。Zuo 等[83-84]提出了两种基于显微镜的动态相位显微成像光路结构。基于电控变焦透镜的光强传输显微系统(TL-TIE)利用电控可变焦透镜实现了整个光学系统高速、非机械、精确可控的远心离焦[图 14(a)][84]。单帧光强传输定量相位显微系统(SQPM)利用空间光调制器实现可编程数字离焦，并结合类迈克尔孙光路结构单帧采集两幅不同焦面上的光强图像，实现了单帧非干涉光强传输定量相位显微[图 14(b)][83]。针对无透镜成像结构，Zuo 等[145]采用基于彩色 LED 阵列的多波长、多角度照明的小型化无透镜显微镜系统，如图 15 所示。该系统利用红、绿、蓝三色波长照射物体后产生的衍射光强作为三幅不同焦面的光强图像，通过求解光强传输方程获得相位后进行数字重聚焦，实现无透镜显微成像。采用多色照明方式虽然简化了离焦光强图像的采集，但最终的测量精度不可避免地受到物体本身色散效应的影响。该问题同样存在于 Waller 等[53]提出的基于色差效应的光强传输相位成像方法中。

6.3　光强传输方程的应用

与大部分相位复原算法类似，光强传输方程在发展伊始主要面向自适应光学、扫描透射电子衍射显微成

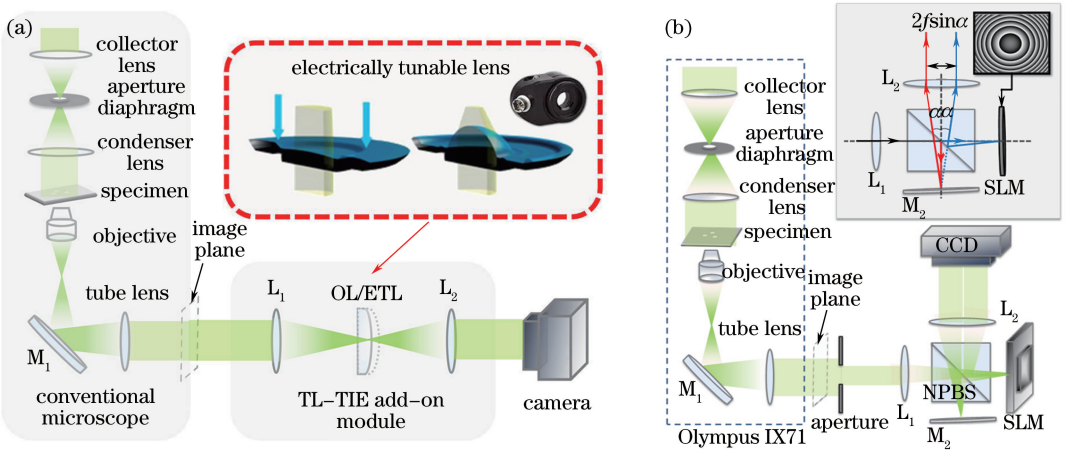

图 14　基于显微镜的光强传输方程动态成像光路结构

Fig. 14　Two optical configurations based on a microscope that allows dynamic TIE phase imaging

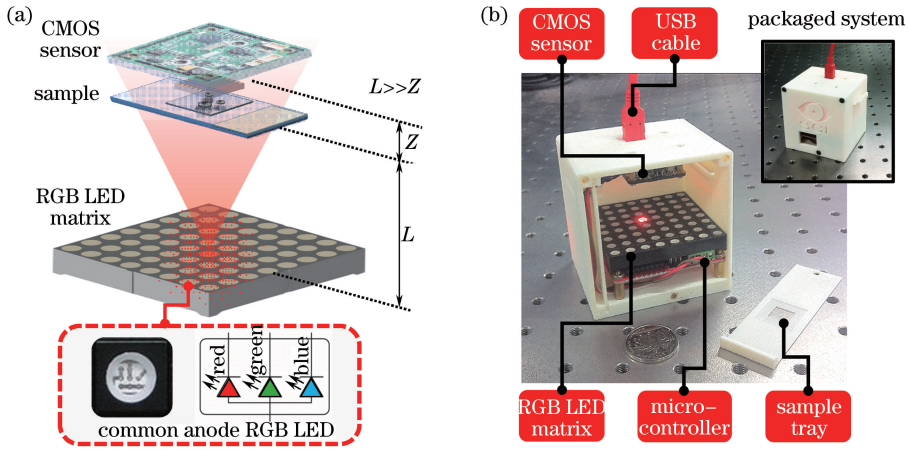

图 15　基于彩色 LED 照明的小型化无透镜成像光路结构。(a) 系统结构；(b) 实物照片

Fig. 15　Lensless TIE phase imaging system with RGB LED illuminations. (a) Schematics explaining the principle of lensless imaging; (b) photograph of the system

像(STEM)与 X 射线衍射成像等，相关实验结果与应用成果颇为丰硕。本文着重回顾其在可见光波段光学成像与显微成像的应用与最新进展。早在 1984 年，Streibl 尝试将光强传输方程应用于光学显微成像，简要证明了采用传统显微镜的科勒照明结构进行相位成像的可行性，并对老鼠精巢细胞切片成像(图 16)[126]。由于当时尚未发表行之有效的光强传输方程求解方法，因而仅给出了光强轴向微分图像而没有给出定量相位重构结果。Streibl 认为该光强轴向微分图像能够有效呈现强度图像中难以观察到的相位细节。

1988 年，Ichikawa 等[85]首次实验验证了光强传输方程，采用傅里叶变换方法求解该方程，获得了待测一维物体的相位分布。在自适应光学领域，以 Roddier 为代表的研究小组探索了如何利用光强传输方程实

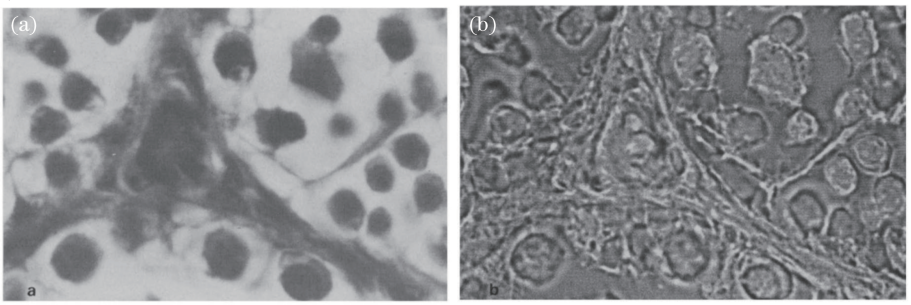

图 16　老鼠精巢细胞切片的成像结果。(a) 明场分布；(b) 对数导数

Fig. 16　Imaging of a rat testicle. (a) Bright field image; (b) logarithmic derivative

时校正大气湍流造成的波前相位扭曲[55-59]。1995 年，Nugent 等基于该方法首次利用 16 keV 的硬 X 射线得到一块薄碳箔的定量相位图像，这是光强传输方程首次成功应用于 X 射线衍射成像领域[50]。随后，光强传输方程又被开创性地应用于中子射线成像[60-61]、透射电子显微[95,146-147]、光学测试[148-149]等领域。

1998 年，Barty 等[51]简要报道了采用光强传输方程实现了人体颊上皮细胞与光纤的定量相衬成像，如图 17 所示。这是光强传输方程在定量相位显微成像中的首次登台亮相。研究结果强调了求解光强传输方程得到的相位是连续的，不需要进行相位解包裹（无需相位解包裹是光强传输方程相位恢复的一大优点，但由于求解光强传输方程必须基于待求相位是单值连续函数这一假设，所以并未从根本上去除传统相位测量中存在的 2π 奇异性问题，只是简化了相位重建的过程而已）。随后 Barty 等又将此项工作拓展到了相位断层扫描，通过转动物体测量得到物体各个角度投影的相位分布后，采用逆 Radon 变换合成了光纤的三维折射率分布（图 18）[67]。

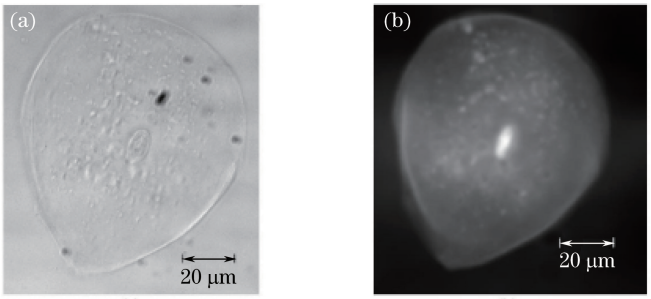

图 17　人体颊上皮细胞的定量相位成像结果。(a) 细胞的微分干涉相衬显微图像；(b) 经过光强传输方程重构的相位分布

Fig. 17　Quantitative phase imaging of an unstained cheek cell sample. (a) Differential interference contrast (DIC) microscopic image of the cell; (b) recovered phase image based on TIE

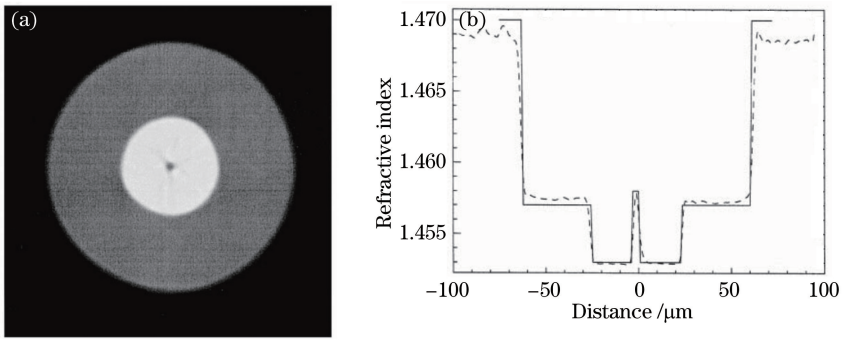

图 18　光纤的三维折射率分布相位断层扫描测量结果。(a) 垂直于光轴的三维重构图像；(b) 沿中心区域的折射率线剖面分布（虚线）与真实分布（实线）的比较

Fig. 18　Quantitative phase tomography of a fiber. (a) 2D slice through the 3D reconstruction perpendicular to the rotation axis; (b) line profile through the middle of the reconstructed 3D distribution (dashed line) compared to the known refractive index distribution (solid line)

光强传输方程在显微成像领域的成功应用以及 Barty 等的实验结果成为光强传输方程在细胞成像与生物医学领域应用的催化剂。2005 年，Ross 等[150]采用光强传输方程提高了未经过染色的细胞在微束辐照下的成像对比度。2006 年，Curl 等[151-152]利用光强传输方程定量检测了细胞的形貌与生长速度，并指明获得定量相位更利于后续数据的处理与分析，如细胞分割与计数。2007 年，Dragomir 等[153]将光强传输方程成功运用于心肌细胞双折射效应的定量测量。除细胞样本外，光强传输方程还成功地应用于光纤等相位物体的相位与折射率分布的定量测量[154-155]。这些应用都体现了光强传输方程在细胞成像与光学检测领域的发展潜力。

2010 年，Kou 等[52]提出光强传输方程可以直接与微分干涉相衬成像技术结合，实现相位信息的定量获取，并成功将其应用于人体颊上皮细胞的定量相位显微成像，相位重构结果与偏振相移微分干涉相衬测量结果相吻合，如图 19 所示。2011 年，Waller 等[53,66]采用体全息分束多幅不同聚焦面的强度图像的单次曝光采集，并通过色差与颜色通道复用实现单次彩色图像曝光获取三幅不同聚焦面的光强图，对变形微镜阵列与

Hela 细胞等进行定量相位成像。2011 年，Kou[120]提出利用反卷积光学传递函数法实现定量相位恢复，并与光强传输方程法进行对比分析；2012 年，Almoro 等[47]利用散斑场照明提高了光强传输方程法测量平滑相位分布的信噪比；同年 Gorthi 等[54]首次将光强传输方程应用于流式细胞术，利用流式细胞设备实现了细胞在不同聚焦面的强度图像的自动采集，实现了血红细胞高通量自动分选（图 20）。

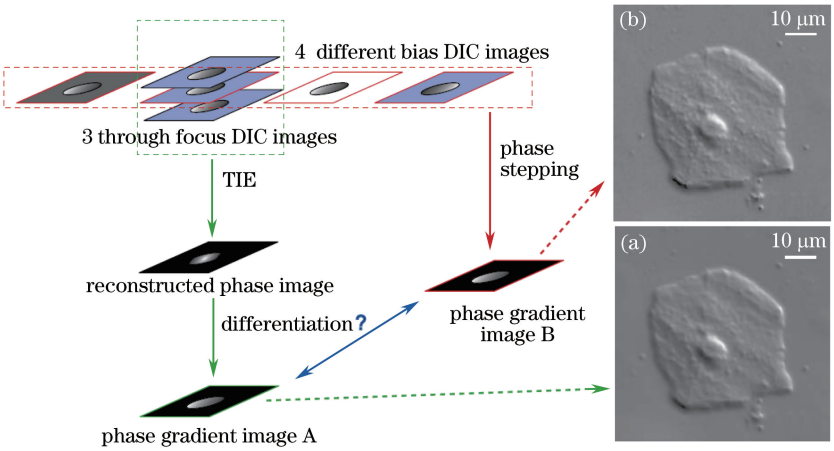

图 19　人颊上皮细胞的定量相位成像结果。(a) 经过光强传输方程重构的定量相位分布反演得到的微分干涉相衬结果；(b) 微分干涉显微镜采集到的光强分布

Fig. 19　Quantitative phase imaging of an unstained cheek cell. (a) Phase-gradient image from differential TI-DIC image; (b) intensity distribution from phase-stepping DIC

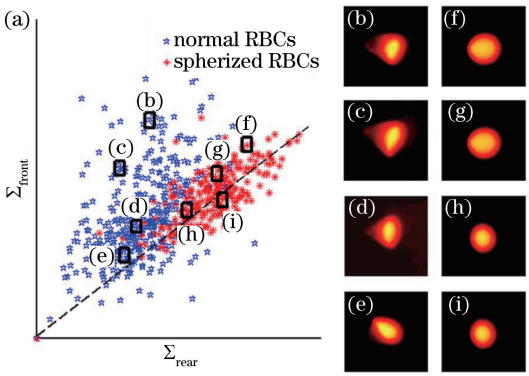

图 20　基于流式细胞仪的血红细胞定量相位成像与分选。(a) 正常与球化血红细胞的散点图分布；(b)～(e) 正常血红细胞的相位分布（在流体中呈现降落伞或拖鞋状）；(f)～(i) 球化血红细胞的相位分布（在流体中依旧为球形）

Fig. 20　Quantitative phase imaging and red blood cell (RBC) screening based on flow cytometry. (a) Scatter plot of RBCs subjected to isotonic and hypotonic solutions; (b)～(e) phase images in the gated regions marked as normal RBCs (in flow take parachute like or slipper like shapes); (f)～(i) phase images in the gated regions marked as spherized RBCs (remained spherical even in flow)

2013 年，Zuo 等[83-84]基于电控变焦透镜与单帧光强传输定量相位显微系统，将光强传输方程成功应用于生物活细胞动态显微成像。针对 MCF-7 乳腺癌细胞细胞膜与片状伪足的浮动过程（图 21）、RAW264.7 小鼠巨噬细胞的凋亡与吞噬过程（图 22）等进行了高分辨率动态三维定量相位显微成像。2014 年，Zuo 等[79]还将光强传输方程运用于微光学元件的表征。采用基于离散余弦变换的求解算法对微透镜阵列、柱面微透镜、菲涅耳透镜等微光学元件进行了精确测量。图 23 所示为间距为 250 μm 平凸石英微透镜阵列的测量结果，通过光强传输方程法得到的曲率半径为 346.7 μm，共聚焦显微镜测量得到的结果为 350.4 μm，均与厂商提供的参考值（350 μm）吻合良好。

2015 年，Bostan 等[156]采用光强传输方程对 HeLa 细胞进行定量相位成像，相位测量结果与数字全息显微所得结果相吻合。还指出定量相位图像为后续细胞分割与计数带来了极大的便利（图 24）。Nguyen 等[157]将基于电控变焦透镜的光强传输显微系统与物体旋转方式相结合，首先获得各个角度的相位投影后，

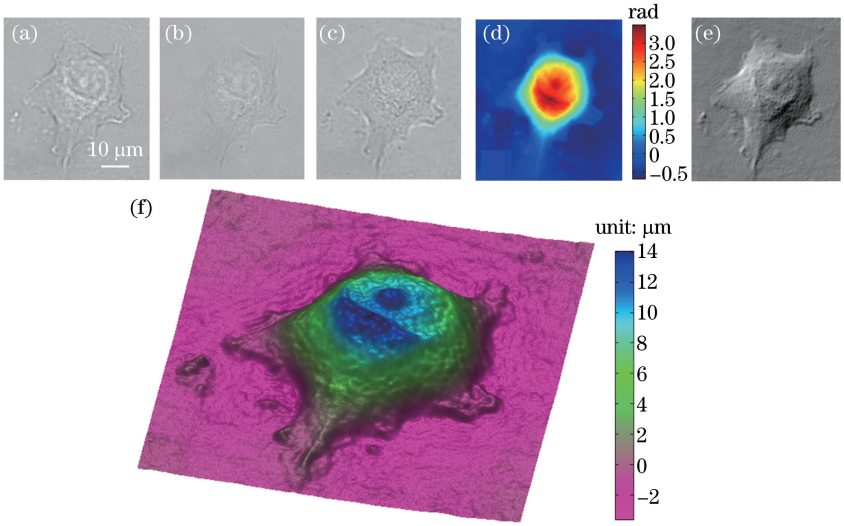

图 21　单一乳腺癌细胞(MCF-7)的动态定量相衬成像。(a)～(c) 离焦距离分别为−2.5,0,2.5 μm 时对应的光强分布；(d) 恢复的相位分布；(e) 纯计算得到的微分干涉相衬显微图像；(f) 细胞厚度的伪彩色三维显示

Fig. 21　Time-lapse quantitative phase imaging of an individual MCF-7 cell using TL-TIE. (a)～(c) Intensity images with defocus distance of −2.5, 0, 2.5 μm, respectively; (d) recovered phase map; (e) digitally simulated DIC image from Fig. 21(d) ; (f) 3D pseudo-color rendering of the cell thickness

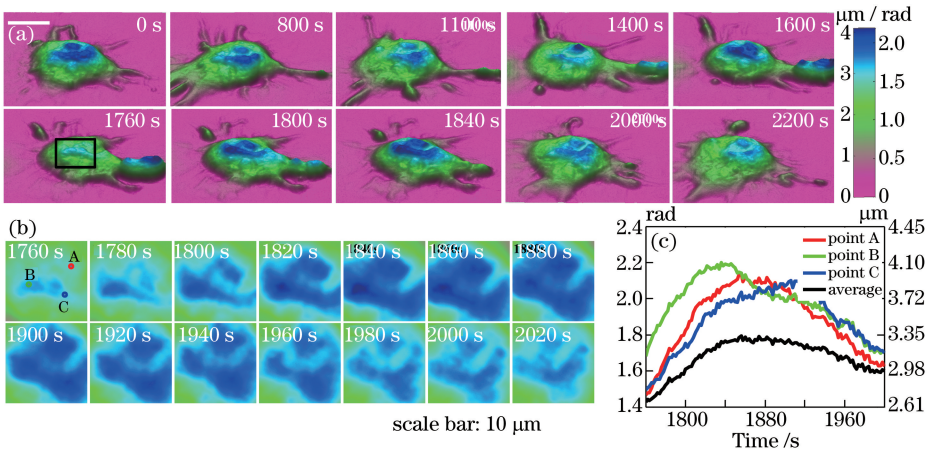

图 22　巨噬细胞吞噬过程的动态定量相位成像结果。(a) 巨噬细胞吞噬过程不同阶段的三维相位分布；(b) 吸入细胞阶段细胞核附近区域的相位变化[对应于图 22(a)中的黑色矩形方框区域]；(c) 图 22(b)中三个点(红、绿、蓝)的相位/厚度随时间的变换曲线(黑色曲线对应于方框区域内的平均值)

Fig. 22　Dynamic TIE phase imaging of the macrophage phagocytosis. (a) Color-coded phase profiles at different stages of phagocytosis; (b) phase maps of the nuclear region of the macrophage [the black square in Fig. 22(a)] during the internalization stage of phagocytosis; (c) phase/thickness variation with time of three points indicated by the dots A, B, and C in Fig. 22(b) (the black curve shows the average of the whole square region)

再结合逆 Radon 变化实现了透明相位物体的三维层析重构[84]。同年,Zuo 等[145]采用基于彩色 LED 阵列照明的无透镜成像光路对马蛔虫子宫切片进行了相位断层扫描成像(图 25)。该方法首先用不同波长、不同角度的照明光照射待测样品,再利用光强传输方程恢复各照明角度下样品的相位,最后基于衍射层析理论重构样品的三维折射率分布。该小型化系统实现了大视场(24 mm^2)、高分辨(横向分辨率 3.72 μm,轴向分辨率 5 μm)的定量相位成像与三维显微层析成像。

7　结束语

基于光强传输方程的相位恢复方法的出现、发展与完善标志着相位探测技术已发展到一个崭新阶段,即

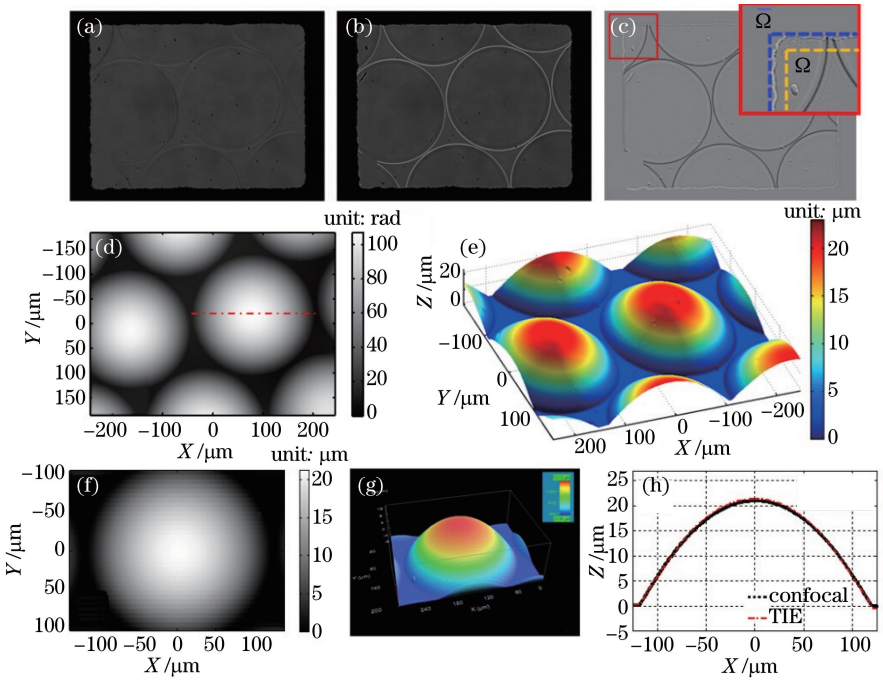

图 23　平凸石英微透镜阵列表征结果。(a) 聚焦面光强分布；(b) 离焦面光强分布($\Delta z=-550$ μm)；(c) 光强轴向微分，右上角子图像为红框部分的局部放大；(d) 通过光强传输方程恢复得到的相位；(e) 伪彩色编码三维形貌；(f) 共聚焦显微镜测量结果；(g) 共聚焦显微镜测量得到的三维拓扑；(h) 单个透镜形貌的剖面对比

Fig. 23 Characterization of a plano-convex quartz microlens array. (a) In-focus intensity; (b) defocused intensity distribution ($\Delta z=-550$ μm); (c) axial intensity derivative, the inset shows the enlarged boxed region; (d) retrieved phase by TIE; (e) rendered pseudo-color surface plot; (f) confocal microscopic result; (g) 3D topography by confocal microscopy; (h) comparison of the line profiles of single lens

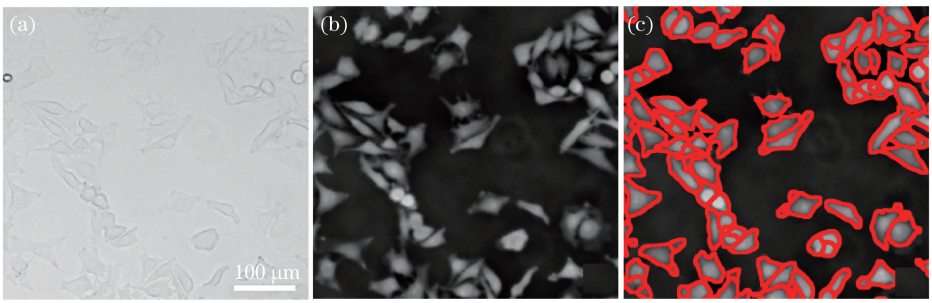

图 24　HeLa 细胞的定量相位成像与自动分割。

(a) 明场显微镜下的光强图像；(b) 经过光强传输方程恢复的相位分布；(c) 细胞分割结果

Fig. 24 Delineation of HeLa cells. (a) Infocus bright-field image; (b) phase image recovered by TIE reconstruction; (c) result of watershed algorithm

从干涉发展为非干涉，从迭代发展为非迭代，从单纯的相位测量发展为光场重构，从严格相干发展为部分相干甚至非相干。从光强传输方程的基本原理、方程求解、光强轴向微分的差分估计、部分相干成像与光场成像及其在光学显微成像中的应用等几个方面综述了研究现状与最新进展。这些研究工作不仅完善了光强传输方程的理论体系，还为光学显微领域的研究人员提供了一种新的影像学手段。光强传输方程非干涉、适于时空部分相干照明的优点使定量相位成像可以在传统光学显微镜下得以实现。得益于显微镜系统内置的柯勒照明结构与经过像差优化的成像物镜，很容易获得具有衍射极限分辨率的定量相位图像，不用担心相干噪声问题。且单光束记录结构稳定性强，对振动等干扰不敏感，无需复杂的隔振器械。此外，求解光强传输方程可直接获得连续的绝对相位，无需复杂的相位解包裹过程，这使相位重构过程大大简化。以上优点以及近年来的快速发展使我们有理由相信光强传输方程有望在定量相位显微成像领域与基于传统干涉的数字全息

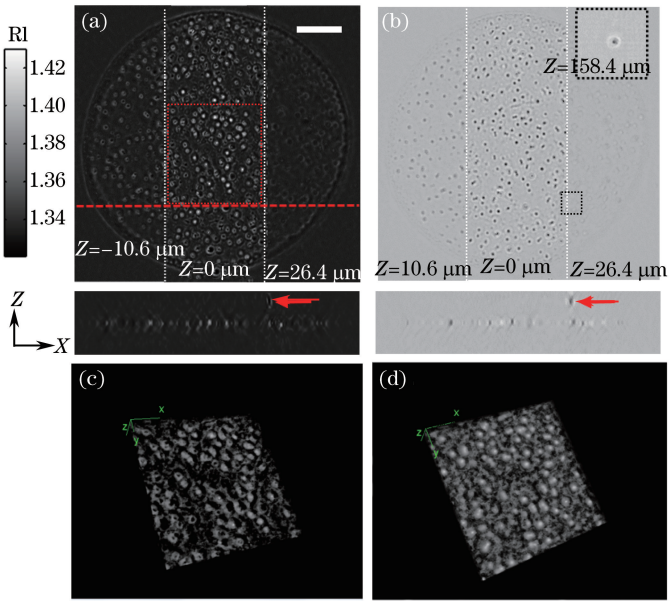

图 25　马蛔虫子宫切片的层析成像结果(尺度条:400 μm)。(a) 不同层面上的折射率分布;(b) 不同层面上的吸收分布(第二行为对应的 X-Z 视图,红色箭头所指的灰尘颗粒位于 $Z=168.4$ μm 平面处);(c) 细胞折射率层析的三维显示;(d) 细胞吸收层析的三维显示

Fig. 25 3D tomographic imaging of a slice of the uterus of *Parascaris equorum* (scale bar: 400 μm). (a) Refractive index of different layers; (b) absorption sections at different depth (the second row shows the corresponding X-Z views of 3D stacks, the arrows point out the dust particle located at a higher layer with $Z=168.4$ μm); (c) 3D rendering of the refractive index; (d) 3D rendering of the absorption distribution

显微技术一较高下,占有自己的一席之地。

光强传输方程技术的发展,已在光学显微领域展现了巨大的潜力,取得了显著的成果。但要在未来得到广泛应用,还有一些理论与技术问题亟待突破。就目前而言,基于光强传输方程的相位恢复算法的主要局限性如下。

1) 重构结果具有较强的空间频率选择性

光强传输方程依赖于小离焦范围内的相衬信息来恢复相位。完全相干光波场下,光强轴向变化率与波前相位的曲率成比例,因此相位低频部分相衬度较低,难以实现高精度、高信噪比的准确重构。尽管增加离焦量可缓解此问题,但是在部分相干成像场合,采用大的离焦距离会使高频部分的相衬度减弱,陷入两头为难的尴尬境地。为了获得低噪声、高分辨率的相位重构结果,目前除了尽可能多地采集不同传输距离处的光强图进行重构外,还没有更有效的方法。

2) 相位恢复的定量性与精度有待进一步商榷

光强传输方程虽然被证明是一种定量的相位恢复方法,然而就目前文献中所展示的结果而言,其测量精度依旧差强人意,与干涉测量法仍存在一定距离。事实上,与干涉法相比,光强传输方程虽然在光源、成像系统等方面大大简化,但要实现高精度的测量,对轴向离焦量的精确标定、边界条件准确获取、求解算法的正确运用方面都提出了很高的要求,而这些方面往往是实际工程应用中制约测量精度的瓶颈问题。

3) 光强包含极小值、零点或者相位漩涡存在时难以应用

该问题在历史上一直是一个极具争议性的问题。2001 年 Allen 等[159]提出采用迭代法解决该问题;但迭代法需要较大的离焦距离来保证产生足够的卷积效应,以使算法达到快速收敛。而在光强传输方程中,记录面之间的距离往往较近,采用迭代法一般不能有效改善其相位重构的准确性。近来 Lubk 等[160]指出 Allen 等的方法存在问题,并提出采用另一种类似于穷举法的方式解决相位漩涡问题。目前仅停留在理论阶段,因为实际情况下准确筛选出光强分布中存在的奇异点是非常困难的。

上述问题的解决,将有助于推进该方法进一步走向成熟并拓展到更多的应用领域。除此之外,以下还列

出了未来较有前景的几个研究方向。

1）相位的分辨率提高

目前光强传输方程重构相位的空间分辨率仍然局限于成像系统的衍射极限，对于超分辨率方面的应用也未见报道，这是今后一个可能的研究方向。

2）四维光场信息的完全重构

光场信息的高维度（四维）难以通过光强传输方程完全重构，但是可以再引入一些额外信息，譬如将低分辨率的光场相机（夏克-哈特曼）测量与传统离焦高分辨率光强序列相结合，两种方法在信息量上对等，有望实现四维光场全分辨率恢复，或者实现维格纳函数/模糊函数的全分辨率恢复。

3）三维光强传输解决三维折射率层析

关于光强传输方程的相位层析成像，现有研究仍局限于旋转样品、改变照明角度这类传统手段。光强传输方程本质上是通过光强的二维面传输解决二维定量相位测量问题。考虑是否能将光强传输方程的二维面传输拓展为三维体传输，以解决三维相位层析问题。

4）相位恢复不仅限于光强传输

光强传输方程本身是借助于光波自由空间传播产生的光强相衬，从而将光强转化为定量相位信息。但产生相衬的方式不仅只有传输（自由传播或离焦本质上是一个二次相位因子）。很多像差函数都会随光强发生改变，如泽尼克相衬函数可以将相位转换为强度显现出来，这就为新的定量相位恢复方法提供了可能性，而不必局限于基于离焦方式的光强传输方程。

以上提及的 4 个研究方向主要集中于理论层面。光强传输显微成像系统的进一步实用化、小型化以及仪器化也是未来研究工作的重点。

参　考　文　献

1 Giloh H, Sedat J W. Fluorescence microscopy: Reduced photobleaching of rhodamine and fluorescein protein conjugates by n-propyl gallate[J]. Science, 1982, 217(4566): 1252-1255.

2 Wilson T. Confocal microscopy[M]. London: Academic Press, 1990: 1-64.

3 Zernike F. Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects[J]. Physica, 1942, 9(7): 686-698.

4 Nomarski G. Differential microinterferometer with polarized waves[J]. Journal de Physique et le Radium, 1955, 16: 9s-13s.

5 Cuche E, Bevilacqua F, Depeursinge C. Digital holography for quantitative phase-contrast imaging[J]. Optics Letters, 1999, 24(5): 291-293.

6 Cuche E, Marquet P, Depeursinge C. Simultaneous amplitude-contrast and quantitative phase-contrast microscopy by numerical reconstruction of Fresnel off-axis holograms[J]. Applied Optics, 1999, 38(34): 6994-7001.

7 Cuche E, Marquet P, Depeursinge C. Spatial filtering for zero-order and twin-image elimination in digital off-axis holography[J]. Applied Optics, 2000, 39(23): 4070-4075.

8 Schnars U, Jüptner W P O. Digital recording and numerical reconstruction of holograms[J]. Measurement Science and Technology, 2002, 13(9): R85.

9 Schnars U, Jueptner W. Digital holography[M]. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005.

10 Hartmann J. Bemerkungen uber den bau und die justirung von spektrographen (in Germany)[J]. Z Instrumentenkd, 1900, 20: 47-58.

11 Platt B C, Shack R. History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing[J]. Journal of Refractive Surgery, 2001, 17(5): S573-S577.

12 Shack R V, Platt B C. Production and use of a lenticular Hartmann screen[J]. Journal of the Optical Society of America, 1971, 61: 656.

13 Gerchberg R W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. Optik, 1972, 35: 237.

14 Gerchberg R W, Saxton W. Phase determination from image and diffraction plane pictures in electron-microscope[J]. Optik, 1971, 34(3): 275-283.

15 Eisebitt S, Lüning J, Schlotter W, *et al.*. Lensless imaging of magnetic nanostructures by X-ray spectro-holography[J].

Nature, 2004, 432(7019): 885-888.

16 Marchesini S, He H, Chapman H N, *et al.*. X-ray image reconstruction from a diffraction pattern alone[J]. Physical Review B, 2003, 68(14): 140101.

17 Gonsalves R A, Chidlaw R. Wavefront sensing by phase retrieval[C]. Proceedings of the 23rd Annual Technical Symposium, International Society for Optics and Photonics, 1979: 32-39.

18 Guyon O. Limits of adaptive optics for high-contrast imaging[J]. The Astrophysical Journal, 2005, 629(1): 592.

19 Zuo J M, Vartanyants I, Gao M, *et al.*. Atomic resolution imaging of a carbon nanotube from diffraction intensities[J]. Science, 2003, 300(5624): 1419-1421.

20 Pedrini G, Osten W, Zhang Y. Wave-front reconstruction from a sequence of interferograms recorded at different planes [J]. Optics Letters, 2005, 30(8): 833-835.

21 Faulkner H M L, Rodenburg J M. Movable aperture lensless transmission microscopy: A novel phase retrieval algorithm [J]. Physical Review Letters, 2004, 93(2): 023903.

22 Fienup J, Wackerman C C. Phase-retrieval stagnation problems and solutions[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1986, 3(11): 1897-1907.

23 Lu G, Zhang Z, Francis T S, *et al.*. Pendulum iterative algorithm for phase retrieval from modulus data[J]. Optical Engineering, 1994, 33(2): 548-555.

24 Misell D. A method for the solution of the phase problem in electron microscopy[J]. Journal of Physics D, 1973, 6(1): L6.

25 Zhang F, Pedrini G, Osten W. Phase retrieval of arbitrary complex-valued fields through aperture-plane modulation[J]. Physical Review A, 2007, 75(4): 043805.

26 Bao P, Zhang F, Pedrini G, *et al.*. Phase retrieval using multiple illumination wavelengths[J]. Optics Letters, 2008, 33(4): 309-311.

27 Anand A, Pedrini G, Osten W, *et al.*. Wavefront sensing with random amplitude mask and phase retrieval[J]. Optics Letters, 2007, 32(11): 1584-1586.

28 Fienup J R. Phase retrieval algorithms: A comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758-2769.

29 Waller L. Phase imaging with partially coherent light[C]. SPIE, 2013, 8589: 85890K.

30 Rodenburg J M, Faulkner H M L. A phase retrieval algorithm for shifting illumination[J]. Applied Physics Letters, 2004, 85(20): 4795-4797.

31 Thibault P, Dierolf M, Menzel A, *et al.*. High-resolution scanning X-ray diffraction microscopy[J]. Science, 2008, 321 (5887): 379-382.

32 Thibault P, Dierolf M, Bunk O, *et al.*. Probe retrieval in ptychographic coherent diffractive imaging [J]. Ultramicroscopy, 2009, 109(4): 338-343.

33 Guizar-Sicairos M, Fienup J R. Phase retrieval with transverse translation diversity: A nonlinear optimization approach [J]. Optics Express, 2008, 16(10): 7264-7278.

34 Maiden A M, Rodenburg J M. An improved ptychographical phase retrieval algorithm for diffractive imaging [J]. Ultramicroscopy, 2009, 109(10): 1256-1262.

35 Maiden A M, Humphry M J, Sarahan M C, *et al.*. An annealing algorithm to correct positioning errors in ptychography [J]. Ultramicroscopy, 2012, 120: 64-72.

36 Thibault P, Menzel A. Reconstructing state mixtures from diffraction measurements[J]. Nature, 2013, 494(7435): 68-71.

37 Batey D J, Claus D, Rodenburg J M. Information multiplexing in ptychography[J]. Ultramicroscopy, 2014, 138: 13-21.

38 Maiden A M, Humphry M J, Zhang F, *et al.*. Superresolution imaging via ptychography[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2011, 28(4): 604-612.

39 Maiden A M, Humphry M J, Rodenburg J M. Ptychographic transmission microscopy in three dimensions using a multi-slice approach[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2012, 29(8): 1606-1614.

40 Zheng Chen, He Xiaoliang, Liu Cheng, *et al.*. A study on the influence of the axial distance error to the image quality of the ptychographic iterative engine[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(10): 1011003.
郑　晨, 何小亮, 刘　诚, 等. 关于轴向距离误差对 PIE 成像质量影响的研究[J]. 光学学报, 2014, 34(10): 1011003.

41 Wang Baosheng, Gao Shumei, Wang Jicheng, *et al.*. Influence of charge coupled device saturation on PIE imaging[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(6): 0611001.

王宝升，高淑梅，王继成，等. 电荷耦合器件饱和效应对 PIE 成像质量的影响[J]. 光学学报，2013，33(6)：0611001.

42 Wang Yali, Shi Yishi, Li Tuo, *et al.*. Research on the key parameters of illuminating beam for imaging via ptychography in visible light band[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(6): 064206.
王雅丽，史祎诗，李　拓，等. 可见光域叠层成像中照明光束的关键参量研究[J]. 物理学报，2013，62(6)：064206.

43 Teague M R. Deterministic phase retrieval: A Green's function solution[J]. Journal of the Optical Society of America, 1983, 73(11): 1434-1441.

44 Paganin D, Nugent K A. Noninterferometric phase imaging with partially coherent light[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(12): 2586-2589.

45 Frank J, Altmeyer S, Wernicke G. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2010, 27(10): 2244-2251.

46 Semichaevsky A, Testorf M. Phase-space interpretation of deterministic phase retrieval[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2004, 21(11): 2173-2179.

47 Almoro P F, Waller L, Agour M, *et al.*. Enhanced deterministic phase retrieval using a partially developed speckle field [J]. Optics Letters, 2012, 37(11): 2088-2090.

48 Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1995, 12(9): 1942-1946.

49 Sheppard C J R. Defocused transfer function for a partially coherent microscope and application to phase retrieval[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2004, 21(5): 828-831.

50 Nugent K A, Gureyev T E, Cookson D F, *et al.*. Quantitative phase imaging using hard X rays[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(14): 2961-2964.

51 Barty A, Nugent K A, Paganin D, *et al.*. Quantitative optical phase microscopy[J]. Optics Letters, 1998, 23(11): 817-819.

52 Kou S S, Waller L, Barbastathis G, *et al.*. Transport-of-intensity approach to differential interference contrast (TI-DIC) microscopy for quantitative phase imaging[J]. Optics Letters, 2010, 35(3): 447-449.

53 Waller L, Kou S S, Sheppard C J R, *et al.*. Phase from chromatic aberrations[J]. Optics Express, 2010, 18(22): 22817-22825.

54 Gorthi S S, Schonbrun E. Phase imaging flow cytometry using a focus-stack collecting microscope[J]. Optics Letters, 2012, 37(4): 707-709.

55 Roddier F. Curvature sensing and compensation: A new concept in adaptive optics[J]. Applied Optics, 1988, 27(7): 1223-1225.

56 Roddier F. Wavefront sensing and the irradiance transport equation[J]. Applied Optics, 1990, 29(10): 1402-1403.

57 Han I W. New method for estimating wavefront from curvature signal by curve fitting[J]. Optical Engineering, 1995, 34(4): 1232-1237.

58 Roddier F. Adaptive optics in astronomy[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

59 Roddier C, Roddier F. Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescopes[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1993, 10(11): 2277-2287.

60 Bajt S, Barty A, Nugent K A, *et al.*. Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope[J]. Ultramicroscopy, 2000, 83(1): 67-73.

61 McMahon P J, Allman B E, Jacobson D L, *et al.*. Quantitative phase radiography with polychromatic neutrons[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(14): 145502.

62 Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation[J]. Optics Communications, 1997, 133(1): 339-346.

63 Zuo C, Chen Q, Asundi A. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: Fast solution with use of discrete cosine transform[J]. Optics Express, 2014, 22(8): 9220-9244.

64 Zysk A M, Schoonover R W, Carney P S, *et al.*. Transport of intensity and spectrum for partially coherent fields[J]. Optics Letters, 2010, 35(13): 2239-2241.

65 Petruccelli J C, Tian L, Barbastathis G. The transport of intensity equation for optical path length recovery using partially coherent illumination[J]. Optics Express, 2013, 21(12): 14430-14441.

66 Waller L, Luo Y, Yang S Y, *et al.*. Transport of intensity phase imaging in a volume holographic microscope[J]. Optics Letters, 2010, 35(17): 2961-2963.

67 Barty A, Nugent K A, Roberts A, *et al.*. Quantitative phase tomography[J]. Optics Communications, 2000, 175(4):

329-336.

68 Tian L, Petruccelli J C, Miao Q, *et al.*. Compressive X-ray phase tomography based on the transport of intensity equation[J]. Optics Letters, 2013, 38(17): 3418-3421.

69 Xue B, Zheng S, Cui L, *et al.*. Transport of intensity phase imaging from multiple intensities measured in unequally-spaced planes[J]. Optics Express, 2011, 19(21): 20244-20250.

70 Bie R, Yuan X H, Zhao M, *et al.*. Method for estimating the axial intensity derivative in the TIE with higher order intensity derivatives and noise suppression[J]. Optics Express, 2012, 20(7): 8186-8191.

71 Tian L, Petruccelli J C, Barbastathis G. Nonlinear diffusion regularization for transport of intensity phase imaging[J]. Optics Letters, 2012, 37(19): 4131-4133.

72 Zheng S, Xue B, Xue W, *et al.*. Transport of intensity phase imaging from multiple noisy intensities measured in unequally-spaced planes[J]. Optics Express, 2012, 20(2): 972-985.

73 Waller L, Tsang M, Ponda S, *et al.*. Phase and amplitude imaging from noisy images by Kalman filtering[J]. Optics Express, 2011, 19(3): 2805-2815.

74 Cheng Hong, Zhang Quanbing, Wei Sui, *et al.*. Phase retrieval based on transport-of-intensity equation[J]. Acta Photonica Sinica, 2011, 40(10): 1566-1570.
程　鸿, 章权兵, 韦　穗, 等. 基于强度传输方程的相位检索[J]. 光子学报, 2011, 40(10): 1566-1570.

75 Cheng Hong, Shen Chuan, Zhang Cheng, *et al.*. Phase retrieval algorithm combining transport of intensity equation and angular spectrum iterative[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(6): 0609001.
程　鸿, 沈　川, 张　成, 等. 强度传输方程和角谱迭代融合的相位检索算法[J]. 中国激光, 2014, 41(6): 0609001.

76 Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(12): 2117-2122.
王　潇, 毛　珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. 光学学报, 2007, 27(12): 2117-2122.

77 Xue Bindang, Zheng Shiling, Jiang Zhiguo. Phase retrieval using transport of intensity equation solved by full multigrid method[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(6): 1514-1518.
薛斌党, 郑世玲, 姜志国. 完全多重网格法求解光强度传播方程的相位恢复方法[J]. 光学学报, 2009, 29(6): 1514-1518.

78 Liu Beibei, Yu Yingjie, Wu Xiaoyan, *et al.*. Applicable conditions of phase retrieval based on transport of intensity equation[J]. Optics and Precision Engineering, 2015, 23(10z): 77-84.
刘贝贝, 于瀛洁, 伍小燕, 等. 基于光强传输方程的相位恢复条件[J]. 光学 精密工程, 23(10z): 77-84.

79 Zuo C, Chen Q, Li H, *et al.*. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation II: Applications to microlens characterization[J]. Optics Express, 2014, 22(15): 18310-18324.

80 Zuo C, Chen Q, Huang L, *et al.*. Phase discrepancy analysis and compensation for fast Fourier transform based solution of the transport of intensity equation[J]. Optics Express, 2014, 22(14): 17172-17186.

81 Zuo C, Chen Q, Yu Y, *et al.*. Transport-of-intensity phase imaging using Savitzky-Golay differentiation filter-theory and applications[J]. Optics Express, 2013, 21(5): 5346-5362.

82 Zuo C, Chen Q, Asundi A. Light field moment imaging: Comment[J]. Optics Letters, 2014, 39(3): 654.

83 Zuo C, Chen Q, Qu W, *et al.*. Noninterferometric single-shot quantitative phase microscopy[J]. Optics Letters, 2013, 38(18): 3538-3541.

84 Zuo C, Chen Q, Qu W, *et al.*. High-speed transport-of-intensity phase microscopy with an electrically tunable lens[J]. Optics Express, 2013, 21(20): 24060-24075.

85 Ichikawa K, Lohmann A W, Takeda M. Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: Experiments[J]. Applied Optics, 1988, 27(16): 3433-3436.

86 Gilbarg D A, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order[M]. New York: Springer, 2001.

87 Bhamra K S. Partial differential equations: An introductory treatment with applications[M]. New Delhi: PHI, 2010.

88 Woods S C, Greenaway A H. Wave-front sensing by use of a Green′s function solution to the intensity transport equation[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2003, 20(3): 508-512.

89 Roddier N A. Algorithms for wavefront reconstruction out of curvature sensing data[C]. SPIE, 1991, 1542: 120-129.

90 Allen L J, Oxley M P. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation[J]. Optics Communications, 2001, 199(1-4): 65-75.

91 Pinhasi S V, Alimi R, Perelmutter L, *et al.*. Topography retrieval using different solutions of the transport intensity equation[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2010, 27(10): 2285-2292.

92 Gureyev T E, Raven C, Snigirev A, *et al.*. Hard X-ray quantitative non-interferometric phase-contrast microscopy[J]. Journal of Physics D, 1999, 32(5): 563.

93 Gureyev T, Roberts A, Nugent K. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: Matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1995, 12(9): 1932-1942.

94 Gureyev T E, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II: Orthogonal series solution for nonuniform illumination[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1996, 13(8): 1670-1682.

95 Volkov V V, Zhu Y, de Graef M. A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation[J]. Micron, 2002, 33(5): 411-416.

96 Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T, *et al.*. Effect of imposed boundary conditions on the accuracy of transport of intensity equation based solvers[C]. SPIE, 2013, 8789: 87890N.

97 Huang L, Zuo C, Idir M, *et al.*. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation in an arbitrarily shaped aperture by iterative discrete cosine transforms[J]. Optics Letters, 2015, 40(9): 1976-1979.

98 Parvizi A, Müller J, Funken S A, *et al.*. A practical way to resolve ambiguities in wavefront reconstructions by the transport of intensity equation[J]. Ultramicroscopy, 2015, 154: 1-6.

99 Schmalz J A, Gureyev T E, Paganin D M, *et al.*. Phase retrieval using radiation and matter-wave fields: Validity of Teague′s method for solution of the transport-of-intensity equation[J]. Physical Review A, 2011, 84(2): 023808.

100 Shanker A, Sczyrba M, Connolly B, *et al.*. Critical assessment of the transport of intensity equation as a phase recovery technique in optical lithography[C]. SPIE, 2014, 9052: 90521D.

101 Beleggia M, Schofield M A, Volkov V V, *et al.*. On the transport of intensity technique for phase retrieval[J]. Ultramicroscopy, 2004, 102(1): 37-49.

102 Paganin D, Barty A, McMahon P J, *et al.*. Quantitative phase-amplitude microscopy. III: The effects of noise[J]. Journal of Microscopy, 2004, 214(1): 51-61.

103 Ishizuka K, Allman B. Phase measurement of atomic resolution image using transport of intensity equation[J]. Journal of Electron Microscopy, 2005, 54(3): 191-197.

104 Roddier F. Curvature sensing: A diffraction theory[R]. NOAO Advanced Development Program, 1987.

105 Soto M, Acosta E, Ríos S. Performance analysis of curvature sensors: Optimum positioning of the measurement planes [J]. Optics Express, 2003, 11(20): 2577-2588.

106 Martin A V, Chen F R, Hsieh W K, *et al.*. Spatial incoherence in phase retrieval based on focus variation[J]. Ultramicroscopy, 2006, 106(10): 914-924.

107 Huang S, Xi F, Liu C, *et al.*. Frequency analysis of a wavefront curvature sensor: Selection of propagation distance[J]. Journal of Modern Optics, 2012, 59(1): 35-41.

108 Waller L, Tian L, Barbastathis G. Transport of intensity phase-amplitude imaging with higher order intensity derivatives [J]. Optics Express, 2010, 18(12): 12552-12561.

109 Soto M, Acosta E. Improved phase imaging from intensity measurements in multiple planes[J]. Applied Optics, 2007, 46(33): 7978-7981.

110 Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Optimum measurement criteria for the axial derivative intensity used in transport of intensity-equation-based solvers[J]. Optics Letters, 2014, 39(2): 182-185.

111 Zuo C, Chen Q, Yu Y, *et al.*. Transport-of-intensity phase imaging using Savitzky-Golay differentiation filter-theory and applications[J]. Optics Express, 2013, 21(5): 5346-5362.

112 Savitzky A, Golay M J E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures[J]. Analytical Chemistry, 1964, 36(8): 1627-1639.

113 Cowley J M. Diffraction physics (2nd edition)[M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

114 Jenkins M H, Long J M, Gaylord T K. Multifilter phase imaging with partially coherent light[J]. Applied Optics, 2014, 53(16): D29-D39.

115 Zhang J S, Claus R A, Dauwels J, *et al.*. Transport of intensity phase imaging by intensity spectrum fitting of exponentially spaced defocus planes[J]. Optics Express, 2014, 22(9): 10661-10674.

116 Barone-Nugent E D, Barty A, Nugent K A. Quantitative phase-amplitude microscopy I: Optical microscopy[J]. Journal of Microscopy, 2002, 206(3): 194-203.

117 Streibl N. Three-dimensional imaging by a microscope[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1985, 2(2): 121-127.

118 Sheppard C J R. Three-dimensional phase imaging with the intensity transport equation[J]. Applied Optics, 2002, 41

(28): 5951-5955.

119 Guigay J P, Langer M, Boistel R, *et al.*. Mixed transfer function and transport of intensity approach for phase retrieval in the Fresnel region[J]. Optics Letters, 2007, 32(12): 1617-1619.

120 Kou S S, Waller L, Barbastathis G, *et al.*. Quantitative phase restoration by direct inversion using the optical transfer function[J]. Optics Letters, 2011, 36(14): 2671-2673.

121 Jenkins M H, Gaylord T K. Quantitative phase microscopy via optimized inversion of the phase optical transfer function [J]. Applied Optics, 2015, 54(28): 8566-8579.

122 Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Multi-filter transport of intensity equation solver with equalized noise sensitivity[J]. Optics Express, 2015, 23(18): 23092-23107.

123 Sun J, Zuo C, Chen Q. Iterative optimum frequency combination method for high efficiency phase imaging of absorptive objects based on phase transfer function[J]. Optics Express, 2015, 23(21): 28031-28049.

124 Goodman J W. Statistical optics[M]. New York: Wiley-Interscience, 1985: 567.

125 Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light[M]. UK: CPI Group Ltd, 2000.

126 Streibl N. Phase imaging by the transport equation of intensity[J]. Optics Communications, 1984, 49(1): 6-10.

127 Gureyev T, Paganin D M, Stevenson A W, *et al.*. Generalized eikonal of partially coherent beams and its use in quantitative imaging[J]. Physical Review Letters, 2004, 93(6): 068103.

128 Gureyev T E, Nesterets Y I, Paganin D M, *et al.*. Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region. 2. Partially coherent illumination[J]. Optics Communications, 2006, 259(2): 569-580.

129 Zuo C, Chen Q, Tian L, *et al.*. Transport of intensity phase retrieval and computational imaging for partially coherent fields: The phase space perspective[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2015, 71: 20-32.

130 Bastiaans M J. Application of the Wigner distribution function to partially coherent light [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1986, 3(8): 1227-1238.

131 Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals[J]. Proceedings of the IEEE, 1992, 80(4): 520-538.

132 Iaconis C, Walmsley I A. Direct measurement of the two-point field correlation function[J]. Optics Letters, 1996, 21 (21): 1783-1785.

133 Raymer M G, Beck M, McAlister D. Complex wave-field reconstruction using phase-space tomography[J]. Physical Review Letters, 1994, 72(8): 1137-1140.

134 Waller L, Situ G, Fleischer J W. Phase-space measurement and coherence synthesis of optical beams [J]. Nature Photonics, 2012, 6(7): 474-479.

135 Ng R, Levoy M, Brédif M, *et al.*. Light field photography with a hand-held plenoptic camera[J]. Computer Science Technical Report, 2005, 2(11): 1-11.

136 Adelson E, Bergen J R. The plenoptic function and the elements of early vision[M].//Computational models of visual processing. Cambridge: MIT Press, 1991: 3-20.

137 Levoy M, Hanrahan P. Light field rendering[C]. Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1996: 31-42.

138 Walther A. Radiometry and coherence[J]. Journal of the Optical Society of America, 1968, 58(9): 1256-1259.

139 Zhang Z Y, Levoy M. Wigner distributions and how they relate to the light field[C]. IEEE International Conference on the Computational Photography, San Francisco, 2009.

140 Zuo C, Chen Q, Asundi A. Transport of intensity equation: A new approach to phase and light field[C]. SPIE, 2014, 9271: 92710H..

141 Orth A, Crozier K B. Light field moment imaging[J]. Optics Letters, 2013, 38(15): 2666-2668.

142 Liu J, Xu T, Yue W, *et al.*. Light-field moment microscopy with noise reduction[J]. Optics Express, 2015, 23(22): 29154-29162.

143 Blanchard P M, Fisher D J, Woods S C, *et al.*. Phase-diversity wave-front sensing with a distorted diffraction grating [J]. Applied Optics, 2000, 39(35): 6649-6655.

144 di Martino J M, Ayubi G A, Dalchiele E A, *et al.*. Single-shot phase recovery using two laterally separated defocused images[J]. Optics Communications, 2013, 293: 1-3.

145 Zuo C, Sun J, Zhang J, *et al.*. Lensless phase microscopy and diffraction tomography with multi-angle and multi-wavelength illuminations using a LED matrix[J]. Optics Express, 2015, 23(11): 14314-14328.

146 Allman B E, McMahon P J, Nugent K, *et al.*. Phase radiography with neutrons[J]. Nature, 2000, 408(6809): 158-159.

147 Volkov V, Zhu Y. Lorentz phase microscopy of magnetic materials[J]. Ultramicroscopy, 2004, 98(2): 271-281.

148 Dorrer C, Zuegel J D. Optical testing using the transport-of-intensity equation[J]. Optics Express, 2007, 15(12): 7165-7175.

149 Shomali R, Darudi A, Nasiri S. Application of irradiance transport equation in aspheric surface testing[J]. Optik, 2012, 123(14): 1282-1286.

150 Ross G J, Bigelow A W, Randers-Pehrson G, *et al.*. Phase-based cell imaging techniques for microbeam irradiations [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B, 2005, 241(1): 387-391.

151 Curl C L, Bellair C J, Harris P J, *et al.*. Quantitative phase microscopy: A new tool for investigating the structure and function of unstained live cells[J]. Clinical Experimental Pharmacology and Physiology, 2004, 31(12): 896-901.

152 Curl C L, Bellair C, Harris P, *et al.*. Single cell volume measurement by quantitative phase microscopy (QPM): A case study of erythrocyte morphology[J]. Cellular Physiology and Biochemistry, 2006, 17(5-6): 193-200.

153 Dragomir N M, Goh X M, Curl C L, *et al.*. Quantitative polarized phase microscopy for birefringence imaging[J]. Optics Express, 2007, 15(26): 17690-17698.

154 Ampem-Lassen E, Huntington S T, Dragomir N M, *et al.*. Refractive index profiling of axially symmetric optical fibers: A new technique[J]. Optics Express, 2005, 13(9): 3277-3282.

155 Roberts A, Ampem-Lassen E, Barty A, *et al.*. Refractive-index profiling of optical fibers with axial symmetry by use of quantitative phase microscopy[J]. Optics Letters, 2002, 27(23): 2061-2063.

156 Bostan E, Froustey E, Nilchian M, *et al.*. Variational phase imaging using the transport-of-intensity equation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(2): 807-817.

157 Nguyen T, Nehmetallah G, Tran D, *et al.*. Fully automated, high speed, tomographic phase object reconstruction using the transport of intensity equation in transmission and reflection configurations[J]. Applied Optics, 2015, 54(35): 10443-10453.

158 Zuo C, Chen Q, Asundi A. Comparison of digital holography and transport of intensity for quantitative phase contrast imaging[M]. //Fringe 2013. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014: 137-142.

159 Allen L, Faulkner H M L, Nugent K, *et al.*. Phase retrieval from images in the presence of first-order vortices[J]. Physical Review E, 2001, 63(3): 037602.

160 Lubk A, Guzzinati G, Börrnert F, *et al.*. Transport of intensity phase retrieval of arbitrary wave fields including vortices[J]. Physical Review Letters, 2013, 111(17): 173902.